第 6 章　機率論

- 日常生活當中，經常會面對許多不確定的問題，要回答某個特定事件發生可能性的大小，必須利用機率(probability)才能回答
  - ➢ 歐巴馬連任下一任美國總統的機率有多高？
  - ➢ 購買樂透彩獲得頭獎的機率有多高？
  - ➢ 丟一枚銅板，出現正面的機率有多高？
  - ➢ 丟一顆骰子，出現 6 點的機率有多高？
- 上述問題中，某些問題較複雜，難以客觀回答(歐巴馬連任的機率)，某些問題則可以用客觀的方式回答出來(如丟銅板、丟骰子的機率，中頭獎的機率)。[我們將大部分焦點放在客觀問題]
- 一般而言，機率是長期不斷重複某種隨機現象所得到的規律模式而以數學來表示者。現實世界裡，許多事件的發生具有不確定性，機率即用來表示某事件發生可能性的大小。

隨機實驗(random experiment)

- **隨機(random)**：隨機是指一個現象事先無法預知是否發生，但在長期多次重複實驗之後，該現象的發生會出現有規則的型態。
- **隨機實驗的意義**：隨機實驗是一種過程(process)，是一種不能確定預知會發生何種結果的實驗方式。<u>在實驗前已知所有可能出現的結果</u>，而<u>實驗後的結果為所有可能的結果之一</u>，<u>但實驗前並未能正確地、肯定地預知它是何種結果</u>。隨機實驗可重複進行，而經過長期重複實驗，出現的結果會遵循某一些統計規則(呈現有規則的分布)。
  - ➢ 例子：『丟一枚銅板』就是一個『隨機實驗』。因為(1)在完成拋擲前，知道只有兩種可能結果(正面、反面)，沒第 3 種；(2)除非看到拋擲結果，否則無法預知結果會是正面還是反面；(3)該實驗可一再重複(可重複丟銅板)；(4)只要實驗次數夠多，出現正面與反面的次數應會趨於相等(出現規律性)

- ➢ 其餘的隨機實驗例子如下表：

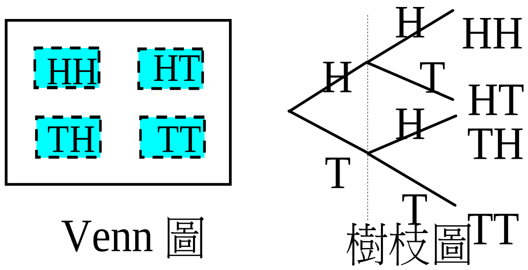
隨機實驗	出象	樣本空間
抽取一個產品做檢驗	良品，不良品	$S=\{良品, 不良品\}$
丟一個骰子 1 次	1,2,3,4,5,6	$S=\{1,2,3,4,5,6\}$
抽查經濟學成績	0~100 分	$S=\{0\sim 100分\}$
衡量初生嬰兒的體重	1,500g~5,000g	$S=\{1{,}500g\sim 5{,}000g\}$

- **基本出象(elementary outcome)**：隨機實驗的每個可能的結果稱為基本出象，又稱為樣本點(sample point)。
  - ➢ 例子：(1)丟一枚銅板一次的基本出象為「正面」、「反面」。(2)丟一顆骰子一次的基本出象為 1、2、3、4、5、6。
- **樣本空間**：一個隨機實驗中，所有可能出象(基本出象)的集合稱為樣本空間。通常以英文大寫字母 S 表示之。
  - ➢ 例子：丟一枚銅板一次的樣本空間為 $S=\{正面, 反面\}$。

- ➢ 例子：丟一枚銅板兩次的樣本空間為

  $S=\{(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)\}$

  通常我們會用范氏圖(Venn diagram)與樹枝圖來讓人家了解一個隨機實驗的基本出象與樣本空間，丟一枚銅板兩次的例子可表示如下：



- ➢ 例子：丟一顆骰子一次的樣本空間為 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$。
- ➢ 例子：丟三顆骰子的樣本空間為(共 $6\times 6\times 6=216$ 個樣本點)

  $S=\{(1,1,1),(1,1,2),\ldots,(6,6,6)\}$

但是，如果你關心的是三顆骰子加起來的點數總和，則樣本空間為

$S=\{3,4,...,18\}$

Remark：同樣的隨機實驗，若感興趣的東西不同，所定義出的樣本空間也不同。

- **事件(event)**：樣本空間的部份集合稱為事件。事件可分兩種：
  - **簡單事件(simple event)**：事件只包含一個基本出象者稱為簡單事件。
  - **複合事件(composite event)**：事件包含二個或二個以上基本出象者稱為複合事件。
  - 例子：丟一顆骰子一次，我們可定義底下事件：(1)令事件 A 為出現偶數點數者，亦即 $A=\{2,4,6\}$，則事件 A 為複合事件。(2)令事件 B 為出現 3 點者，亦即 $B=\{3\}$，則事件 B 為簡單事件。

計算樣本點個數的法則

- **乘數定理**：設一隨機實驗包含 k 個實驗 $E_1,E_2,\cdots,E_k$，若每一實驗 E_i 有 n_i 種結果，$i=1,2,\cdots,k$，則該隨機實驗有 $n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$ 種可能結果。
- **排列(permutation)**：自一個含有 n 個元素的集合中，一次抽出 r 個元素(或每次抽取一個，但抽出後不放回，連續抽取 r 次)，則共有 P_r^n 種不同的樣本組[抽出之 r 個元素的排列順序不同時，視為不同樣本點]

$$P_r^n=\frac{n!}{(n-r)!}=n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)$$

[說明]　抽出第 1 個時，有 n 種可能，第 2 個有 $n-1$ 種可能，第 3 個有 $n-2$ 種可能，依此類推，第 r 個有 $n-r+1$ 種可能；根據乘數定理，總共有 $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$ 種可能樣本點。

- 例子：設定四位數的數字密碼。(1)若不要求四個數字不相同，則共有 $10\times10\times10\times10=10,000$ 種可能組合[乘數定理]；(2)若要求四個數字不相同，則共有 $P_4^{10}=10\times9\times8\times7=5,040$ 種可能組合[排列]。

- **組合(combination)**：自一個含有 n 個元素的集合中，一次抽出 r 個元素，不考慮抽出之順序[抽出之 r 個元素的排列順序不同時，視為相同樣本點]，則共有 C_r^n 種不同的樣本組

$$C_r^n=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)}{r!}$$

[說明]　若抽出 r 個元素，排列順序不同時視為不同樣本點，則共有 $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$ 種可能樣本點。但 r 個元素總共有 $r!=r\times(r-1)\times\cdots\times1$ 種可能排列，因此若不考慮抽出之 r 個元素的順序，共有 $\frac{n!}{(n-r)!r!}=C_r^n$ 種可能。

- 例子：6/38 樂透彩(台灣最早的樂透彩券)

  玩法：投注時從 38 個號碼中挑選 6 個。

  因此彩券號碼總共有 $2,760,681$ 種組合。

  $$C_6^{38}=\frac{38!}{6!(38-6)!}=2,760,681$$

  開獎：開出 6 個號碼，外加 1 個特別號。

  各種獎項可能的號碼組合數量：

  頭獎：6 個號碼全中。只有 $C_6^6=\frac{6!}{6!}=1$ 種組合

  二獎：中 5 個號碼，特別號也中。有 $C_1^1C_5^6=1\times\frac{6!}{5!1!}=6$ 種組合。

  三獎：中 5 個號碼。有 $C_1^{31}C_5^6=\frac{32!}{1!31!}\frac{6!}{5!1!}=186$ 種組合。

  四獎：中 4 個號碼。有 $C_2^{32}C_4^6=\frac{32!}{2!30!}\frac{6!}{4!2!}=7,440$ 種組合。

  普獎：中 3 個號碼。有 $C_3^{32}C_3^6=\frac{32!}{3!29!}\frac{6!}{3!3!}=99,200$ 種組合。

機率理論

- 用來解釋機率的理論主要有三種：古典的機率理論、客觀的機率理論、主觀的機率理論。
- **古典的機率理論**(classical probability)：又稱為先驗的機率(prior probability)理論，它是指，若在某一個隨機實驗中，有 N 種互相排斥(互斥)且同等可能出現的出象，則任一出象 E 發生的機率為

$$P(E)=\tfrac{1}{N}$$

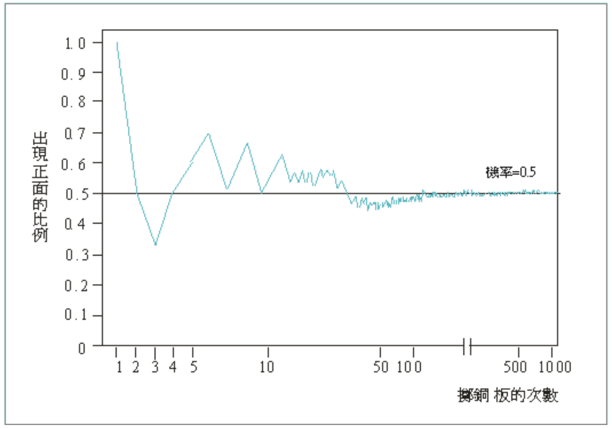
  - 例子：銅板有兩個互斥的出象，『正面』與『反面』(兩者不可能同時出現，這就是互斥的意思)，若銅板是公正無偏的，則 $P(\text{正面})=P(\text{反面})=\tfrac{1}{2}$。
  - 例子：骰子有 6 個互斥出象，1、2、3、4、5、6，每個點數出現的機率為 $P(\{1\})=P(\{2\})=P(\{3\})=P(\{4\})=P(\{5\})=P(\{6\})=\tfrac{1}{6}$。若定義事件 $A=\{2,4,6\}$，則事件 A 包含 3 個互斥出象，因此事件 A 發生的機率為 $P(A)=\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{2}$。

  - 現實世界中有很多機率無法以先驗的機率來解釋。例如：明天下雨的機率是多少？購買冷氣出現瑕疵品的機率有多高？先驗的機率理論無法回答這些問題，其它機率理論於焉誕生。
- **客觀的機率理論**(objective probability)：又稱相對次數的機率理論(relative frequency probability)，係指在長期重複的隨機實驗中，事件 E 發生的機率為出現該事件之次數與隨機實驗的總次數之比。若以 $n(E)$ 表示事件 E 出現的次數，n 表隨機實驗的總次數，則事件 E 發生的機率為

$$P(E)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(E)}{n}$$

  - 例子：若投擲一枚無偏的銅板 10 次，出現正面的比例可能會偏離 0.5，但如果繼續不斷的投擲，例如投擲 1000 次，則出現正面的比例會接近 0.5。[參見下圖]

投擲銅板出現正面的機率：投擲次數越多，出現正面的比例會越接近 0.5；這就是所謂的大數法則。



  - **大數法則(law of large number)**：若某事件有既定的機率，而我們不斷的進行相同的實驗，則該事件發生的次數比例會越來越接近這個既定的機率。

- **主觀的機率理論**(subjective probability)：事件發生的機率取決於人們對發生此事件的相信程度

$$P(E)=[\text{對事件}E\text{發生的信心}]$$

  - 實際生活中，有很多機率描述應屬主觀機率
    (1) 買樂透彩會自己動手挑選號碼的人，一定是認為自己所挑選的號碼中獎機率(主觀機率)比電腦選號的高。
    (2) 觀察歷屆選舉，我們都會發現某些有趣的候選人，大部分的人都認為他選不上，但他卻還是參選了，原因是他主觀上認為他當選的機率(主觀機率)很高。

三個機率理論的比較

- 就先驗機率而言，若事件的出象不是同等可能，則不能求得機率
- 就相對次數的機率而言，若事件不能實驗，亦無法求得機率。
- 主觀機率因無客觀的標準，因此經常因主觀認知的差異而發生爭議；但其之所以被接受，並不斷擴大其使用範圍(財務上很多理論都是運用主觀機率的觀念)，是因為有些事件既無法實驗，又不是先驗的(例如股票市場崩盤)，因此對其發生之機率的估計，只好依主觀來認定。

補充：集合的運算

- 符號與基本觀念：
  - w_i 代表基本出象(樣本點)，樣本空間以 $S=\{w_i\}$ 來表示。
  - 每個基本出象 w_i 一定是樣本空間 S 的一個元素，以 $w_i \in S$ [w_i 屬於 S]來表示。
  - **事件**(event)是樣本空間的部份集合，亦即由部分的樣本點所形成的集合。
  - 一事件 A 所包含的元素，一定屬於樣本空間 S；通常以符號 $A \subseteq S$ 來表示，意思是『若 $w_i \in A$，則 $w_i \in S$ 』。
- **補集(complement)**或**餘集合**：一事件 A 的補集是『不屬於事件 A 的樣本點所形成的集合』。以 $\bar{A}$ 來代表事件 A 的補集，則

  $\bar{A}=\{w_i \in S : w_i \notin A\}$

  [意義：樣本空間 S 中的樣本點 w_i，不屬於 A 的所有樣本點集合]

- **聯集(union)**：兩事件 A 與 B 的聯集是『屬於 A 或屬於 B 的所有樣本點所形成的集合』，以 $A \bigcup B$ 來表示事件 A 與 B 的聯集，則

  $A \bigcup B=\{w_i \in S : w_i \in A \text{ 或 } w_i \in B\}$

  [意義：樣本空間 S 中的樣本點 w_i，屬於 A 或屬於 B 的所有樣本點的集合]

  若有 n 個事件 $A_i, i=1,...,n$，其聯集通常記為 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 。
- **交集(intersection)**：兩事件 A 與 B 的交集是『屬於 A 且屬於 B 的所有樣本點所形成的集合』，以 $A \bigcap B$ 來表示事件 A 與 B 的聯集，則

  $A \bigcap B=\{w_i \in S : w_i \in A \text{ 而且 } w_i \in B\}$

  [意義：樣本空間 S 中的樣本點 w_i，屬於 A 且屬於 B 的所有樣本點的集合]

  若有 n 個事件 $A_i, i=1,...,n$，其交集通常記為 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 。

- **空集合(empty set)**：若有一集合並未包含任何樣本空間中的樣本點，則稱其為空集合，以符號 $\varnothing$ 來表示。
- **互斥(mutually exclusive)事件**：若兩事件 A 與 B 的交集為空集合(亦即 A 與 B 包含的樣本點完全不同)，則稱 A 與 B 為互斥事件。
  - 一個特例：A 與 $\bar{A}$ 為互斥事件。
- **分割(partitions)集合**：若集合 $A_i, i=1,...,n$ 為樣本空間 S 的子集合，當底下兩個條件滿足時，我們稱 $A_i, i=1,...,n$ 為樣本空間 S 的一個分割集合

  (1) 任何兩個 A_i 都是互斥的，亦即 $A_i \bigcap A_j=\varnothing, \forall i \neq j$ 。

  (2) $A_i, i=1,...,n$ 的聯集形成樣本空間，亦即 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$

  - 一個特例：A 與 $\bar{A}$ 為樣本空間 S 的一個分割集合。
- **互補性質**：一事件 A 之補集的補集為事件 A 本身，亦即

  $\bar{\bar{A}}=A$

- **交換律(commutativity)**：兩事件聯集(交集)之運算順序可以隨意交換，亦即

  $A \bigcup B = B \bigcup A$

  $A \bigcap B = B \bigcap A$
- **結合律(associativity)**：在三個事件的聯集(交集)之運算中，可以依任意順序結合聯集(交集)

  $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$

  $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$
- **分配律(distributivity)**：A 與 $B \bigcup C$ 之交集，等於 $A \bigcap B$ 與 $A \bigcap C$ 之聯集

  $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$

  推展： $A \bigcap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \bigcap B_i)$

  A 與 $B \bigcap C$ 之聯集，等於 $A \bigcup B$ 與 $A \bigcup C$ 之交集

  $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$

  推展： $A \bigcup (\bigcap_{i=1}^{n} B_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \bigcup B_i)$

- **狄摩根定律(De Morgan's Law)**：
  - 事件之聯集的補集，等於事件之補集的交集

    $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

    $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n$ 或是 $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$
  - 事件之交集的補集，等於事件之補集的聯集

    $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

    $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \cdots \cup \bar{A}_n$ 或是 $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$
- 其餘有趣的性質：
  - $A \cap B$ 與 $A \cap \bar{B}$ 為互斥事件。
  - $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$，因為

    $A = A \cap S = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

    式中用到 $B \cup \bar{B} = S$ 的性質。

  - 若 $B_i, i = 1, \ldots, n$ 為樣本空間 S 的一個分割集合，則 $A \cap B_i, i = 1, \ldots, n$ 為互斥事件，且 $A \cap B_i, i = 1, \ldots, n$ 為事件 A 的一個分割集合，亦即我們可把事件 A 表達為 $A = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i)$。
  - $A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$，因為

    $$\begin{aligned} A \cup B &= S \cap (A \cup B) = (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) \\ &= (A \cap (A \cup B)) \cup (\bar{A} \cap (A \cup B)) \\ &= A \cup (\bar{A} \cap B) \end{aligned}$$

機率的公理體系

- 不管你認為哪種機率理論的想法才適用於你所要分析的問題，機率都必須滿足一些規則才符合機率的性質，才能進行機率的演算。純粹由機率的性質及其演算法去定義機率，稱為機率的公理體系(axioms of probability)。機率一定要滿足底下三個公理。

- 在一個隨機實驗中，設其樣本空間為 S，對應於 S 中任一事件 E_i 給予一個實數值 $P(E_i)$，若 $P(E_i)$ 滿足底下三個公理，則稱 $P(E_i)$ 為機率。
  - **公理一**：$0 \le P(E_i) \le 1, \quad \forall E_i \in S$。表示任一事件 E_i 若可能發生，則其機率大於 0 小於 1；若事件不可能發生，則其機率等於 0；若事件一定發生，則機率等於 1。
  - **公理二**：$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n)$，其中 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 為互斥事件。表示若有 n 個互斥事件 $E_1, E_2, \cdots, E_n$，則 E_1 發生或 E_2 發生 $\cdots$ 或 E_n 發生的機率為其個別機率的和。
  - **公理三**：$P(S) = 1$。表示樣本空間中所有事件均發生的機率總合等於 1。

- 例子：在投擲銅板的隨機實驗中，樣本空間為 $S = \{正面, 反面\}$，若設定 $P(E_1{=}正面) = P(E_2{=}反面) = \frac{1}{2}$，則這種設定方式就是一種機率，因其滿足機率的三個公理。

  (1) $0 \le P(E_1{=}正面) \le 1$、$0 \le P(E_2{=}反面) \le 1$。

  (2) 因 $P(E_1 \cup E_2) = P(S) = 1$，且

  $P(E_1) + P(E_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ [因 E_1 與 E_1 為互斥事件]，

  故 $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$。

  (3) $P(S) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$。

事件機率

- **事件機率**：假設事件 A 定義於隨機實驗的樣本空間，其發生之機率 $P(A)$ 為事件 A 之基本出象(E_i)的機率總和，亦即

  $P(A) = \sum P(E_i)$，$E_i \in A$。

- 例子：打香腸的遊戲規則是『丟三顆骰子，點數總和最大者贏』。若老闆已經擲出 16 點，你可以贏他的機率有多高？
若要贏老闆，只有丟出 17 點或 18 點。欲得到 17 點必須擲出 $\{(5,6,6),(6,5,6),(6,6,5)\}$，欲得到 18 點必須擲出 $\{(6,6,6)\}$，總共只有四個基本出象可贏過老闆；擲 3 顆骰子共有 $6\times6\times6=216$ 種基本出象，所以贏過老闆的機率為 $\frac{4}{216}=\frac{1}{54}$。
- **聯合機率**：二個或二個以上事件同時發生的機率稱為聯合機率。
  - ➢ 假設事件 A、B 均為定義於樣本空間 S 的事件，我們將事件 A、B 同時發生的機率表示為
  $P(A\cap B)$ 或 $P(A,B)$
  同時發生 A 事件與 B 事件的機率就是聯合機率 $P(A\cap B)$，該機率等於 A 集合與 B 集合的交集之基本出象(樣本點)的機率總和
  $$P(A\cap B)=\sum P(E_i),\quad E_i\in A\cap B$$

- 若將樣本空間 S 依 A 類別分割為 A_1 與 A_2 的互斥空間，依 B 類別分割為 B_1 與 B_2 的互斥空間，則 S 可分割成 2×2 個互斥空間，如下表所示(聯合次數分配表)

$A\setminus B$	B_1	B_2
A_1	$A_1\cap B_1$	$A_1\cap B_2$
A_2	$A_2\cap B_1$	$A_2\cap B_2$

根據此一樣本空間的分割，可得到底下的聯合機率分配表

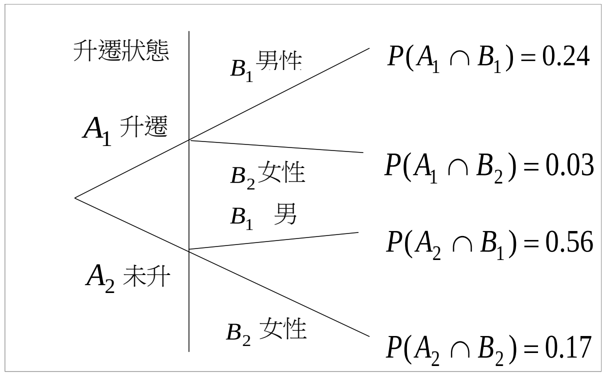
$A\setminus B$	B_1	B_2
A_1	$P(A_1\cap B_1)$	$P(A_1\cap B_2)$
A_2	$P(A_2\cap B_1)$	$P(A_2\cap B_2)$

  - ➢ 例子：假設某公司的兩性平權委員會想了解男女員工的升遷是否公平，蒐集了 1200 個員工的升遷資料，根據升遷狀況(A)與性別(B)所整理出的聯合次數分配表如下

		性別(B)		合 計
		男性(B_1)	女性(B_2)	
升遷狀態 (A)	升遷(A_1)	288	36	324
	未升遷(A_2)	672	204	876
合 計		960	240	1,200

根據該表的數據可知，男性員工已升遷的機率為
$P(\text{升遷},\text{男性})=P(A_1\cap B_1)=288/1200=0.24$
男性員工未升遷的機率為
$P(\text{未升遷},\text{男性})=P(A_2\cap B_1)=672/1200=0.56$
女性員工已升遷的機率為
$P(\text{升遷},\text{女性})=P(A_1\cap B_2)=36/1200=0.03$
女性員工未升遷的機率為
$P(\text{未升遷},\text{女性})=P(A_2\cap B_2)=204/1200=0.17$
根據這些數據我們可得底下的聯合機率分配表

		性別		$P(A_i)$
		男性（B_1）	女性（B_2）	
升遷	升遷(A_1)	$P(A_1\cap B_1)=0.24$	$P(A_1\cap B_2)=0.03$	$P(A_1)=0.27$
	未升遷(A_2)	$P(A_2\cap B_1)=0.56$	$P(A_2\cap B_2)=0.17$	$P(A_2)=0.73$
$P(B_i)$		$P(B_1)=0.80$	$P(B_2)=0.20$	1.00



- ➢ 由樹枝圖更可清楚看出，男性升遷的機率(0.24)高於女性(0.03)。

➢ 聯合次數分配與聯合機率分配的一般化：將樣本空間 S 依 A 類別分割為 $A_1,\dots,A_r$ 的互斥空間，依 B 類別分割為 $B_1,\dots,B_c$ 的互斥空間，則 S 可分割成 $r\times c$ 個互斥空間，聯合次數分配表如下所示

$A\backslash B$	B_1	B_2	$\cdots$	B_c
A_1	$A_1\cap B_1$	$A_1\cap B_2$	$\cdots$	$A_1\cap B_c$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	$A_r\cap B_1$	$A_r\cap B_2$	$\cdots$	$A_r\cap B_c$

聯合機率分配表則為

$A\backslash B$	B_1	B_2	$\cdots$	B_c
A_1	$P(A_1\cap B_1)$	$P(A_1\cap B_2)$	$\cdots\cdots$	$P(A_1\cap B_c)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	$P(A_r\cap B_1)$	$P(A_r\cap B_2)$	$\cdots$	$P(A_r\cap B_c)$

● **邊際機率**(marginal probability)：在有二個或二個以上類別的樣本空間中，若僅考慮某一類別個別發生的機率者稱為邊際機率。

➢ 在聯合機率分配表中，垂直相加或平行相加所得到的機率即為邊際機率。

➢ <u>水平加總</u>為(對所有的 $i=1,\dots,r$ 均成立)

$$P(A_i)=\sum_{j=1}^{c}P(A_i\cap B_j)=P(A_i\cap B_1)+P(A_i\cap B_2)+\cdots+P(A_i\cap B_c)$$

[說明] 因 $B_1,\dots,B_c$ 為樣本空間 S 的分割集合，故 A_i 可表為

$$A_i=\bigcup_{j=1}^{c}A_i\cap B_j=(A_i\cap B_1)\cup(A_i\cap B_2)\cup\cdots\cup(A_i\cap B_c)$$

其中 $(A_i\cap B_1),(A_i\cap B_2),\cdots,(A_i\cap B_c)$ 為互斥事件，因此事件 A_i 的機率為這些互斥事件之機率的加總。

➢ <u>垂直加總</u>為(對所有的 $j=1,\dots,c$ 均成立)

$$P(B_j)=\sum_{i=1}^{r}P(A_i\cap B_j)=P(A_1\cap B_j)+P(A_2\cap B_j)+\cdots+P(A_r\cap B_j)$$

[說明] 因 $A_1,\dots,A_r$ 為樣本空間 S 的分割集合，故 B_j 可表為

$$B_j=\bigcup_{i=1}^{r}A_i\cap B_j=(A_1\cap B_j)\cup(A_2\cap B_j)\cup\cdots\cup(A_r\cap B_j)$$

其中 $(A_1\cap B_j),(A_2\cap B_j),\cdots,(A_r\cap B_j)$ 為互斥事件，因此事件 B_j 的機率為這些互斥事件之機率的加總。

➢ 例子：員工升遷的例子中，員工中男性的機率(比例)為

$$\begin{aligned}P(\text{男性})&=P(B_1)=P(A_1\cap B_1)+P(A_2\cap B_1)\\&=P(\text{升遷, 男性})+P(\text{未升遷, 男性})\\&=0.24+0.56=0.80\end{aligned}$$

員工中女性的機率(比例)為

$$\begin{aligned}P(\text{女性})&=P(B_2)=P(A_1\cap B_2)+P(A_2\cap B_2)\\&=P(\text{升遷, 女性})+P(\text{未升遷, 女性})\\&=0.03+0.17=0.20\end{aligned}$$

同理，員工中升遷的機率(比例)為

$$\begin{aligned}P(\text{升遷})&=P(A_1)=P(A_1\cap B_1)+P(A_1\cap B_2)\\&=P(\text{升遷, 男性})+P(\text{升遷, 女性})\\&=0.24+0.03=0.27\end{aligned}$$

員工中未升遷的機率(比例)為

$$\begin{aligned}P(\text{未升遷})&=P(A_2)=P(A_2\cap B_1)+P(A_2\cap B_2)\\&=P(\text{未升遷, 男性})+P(\text{未升遷, 女性})\\&=0.56+0.17=0.73\end{aligned}$$

● **條件機率**：令 A、B 為定義於樣本空間的事件，已知發生事件 B 之後再發生事件 A 的機率，稱為事件 A 的條件機率。表示為

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\quad P(B)\neq 0$$

[事件 B 已發生時，事件 A 亦發生的機率為 $P(A\cap B)$，分母除以 $P(B)$ 僅是為了將條件機率標準化]

- **[說明]** 由於 A 與 $\bar{A}$ 為樣本空間的分割集合，所以可將事件 B 表達成 $(B\cap A)$ 與 $(B\cap \bar{A})$ 兩個互斥事件的聯集，亦即

$$B = B\cap S = B\cap (A\cup \bar{A}) = (B\cap A)\cup (B\cap \bar{A})$$

當事件 B 已發生，事件 A 可能發生亦可能未發生；事件 B 已發生，再發生事件 A 的集合為 $(A\cap B)$，事件 B 已發生，而事件 A 未發生的集合為 $(\bar{A}\cap B)$。根據上式可知

$$P(B) = P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B)$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} + \frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}$$

$\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ 為事件 B 已發生，再發生事件 A 的機率，$\dfrac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}$ 為事件 B 已發生，而未發生事件 A 的機率，兩者加起來的機率等於 1 [如此才能真正滿足機率之定義]。

- 同理，已知事件 A 發生，再發生事件 B 的條件機率為

$$P(B\,|\,A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0$$

- 例子：已知員工已升遷，其為男性的機率(比例)有

$$P(\text{男性}\,|\,\text{升遷}) = P(B_1\,|\,A_1) = \frac{P(A_1\cap B_1)}{P(A_1)} = \frac{0.24}{0.27} = 0.89$$

已知員工已升遷，其為女性的機率(比例)有

$$P(\text{女性}\,|\,\text{升遷}) = P(B_2\,|\,A_1) = \frac{P(A_1\cap B_2)}{P(A_1)} = \frac{0.03}{0.27} = 0.11$$

已知員工為男性，其升遷的機率(比例)有

$$P(\text{升遷}\,|\,\text{男性}) = P(A_1\,|\,B_1) = \frac{P(A_1\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{0.24}{0.8} = 0.30$$

已知員工為女性，其升遷的機率(比例)有

$$P(\text{升遷}\,|\,\text{女性}) = P(A_1\,|\,B_2) = \frac{P(A_1\cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{0.03}{0.20} = 0.15$$

- 例子：全球經濟發展息息相關，而美國是全世界最大的經濟體，台灣經濟亦無法免於受到美國經濟的影響，但是，美國股市上漲(下跌)時，台灣股市也上漲(下跌)嗎？
蒐集『台灣加權股價指數』與『美國 NASDAQ 綜合股價指數』(使用前一天資料)在 2008 年 1~9 月的每日漲跌資料：

		台灣股市		小計
		漲	跌	
美國股市	漲	44	37	81
	跌	36	58	94
小計		80	95	175

據此我們可以整理出底下的機率分配表

		台灣股市		小計
		漲	跌	
美國股市	漲	0.25	0.21	0.46
	跌	0.21	0.33	0.54
小計		0.46	0.54	1

定義底下事件

TPU：台灣股市上漲　　TPD：台灣股市下跌

NYU：美國股市上漲　　NYD：美國股市下跌

當美國股市上漲時，台灣股市上漲的機率為 0.54

$$P(TPU\,|\,NYU) = \frac{P(TPU\cap NYU)}{P(NYU)} = \frac{0.25}{0.46} = 0.54$$

當然，美國股市上漲時，臺灣股市下跌的機率只有 0.46。

當美國股市下跌時，台灣股市下跌的機率為 0.61

$$P(TPD\,|\,NYD) = \frac{P(TPD\cap NYD)}{P(NYD)} = \frac{0.33}{0.54} = 0.61$$

當然，美國股市下跌時，臺灣股市上漲的機率只有 0.39。

結論：由此可見，當美國股市上漲時，台灣股市上漲的機率是比較高的，當美國股市下跌時，台灣股市下跌的機率也是比較高的；投資台灣股市，確實值得先參考美國股市。

事件的性質與事件機率的運算

- **獨立事件**：係指一事件的發生不影響其他事件發生的機率。
  - ➢ 若有 A、B 兩事件，已知 A 事件發生不影響我們對 B 事件機率的看法，亦即 $P(B|A)=P(B)$；或是已知 B 事件發生不影響我們對 A 事件機率的看法，亦即 $P(A|B)=P(A)$，則稱 A、B 兩事件獨立。
  - ➢ 由於條件機率為 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$，若 A、B 兩事件獨立，即表示 $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B)$，因此 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$；同樣地，$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$，若 A、B 獨立即表示 $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$，因此 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$。
- **兩事件獨立(independent)之定義**：若 A、B 兩事件合乎於下列任一條件，則 A、B 互為獨立。
  (1) $P(A|B)=P(A)$
  (2) $P(B|A)=P(B)$
  (3) $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

- **相依事件(dependent event)**：係指一事件的發生影響其他事件發生的機率[兩事件若不為獨立事件，即稱為相依事件]。
  - ➢ 若 A、B 兩事件合乎於下列任一條件，則 A、B 互為相依。
    (1) $P(A|B)\neq P(A)$
    (2) $P(B|A)\neq P(B)$
    (3) $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$
- **互斥事件**：如果事件沒有共同的元素(樣本點)則稱為互斥事件。
  - ➢ 若 A、B 兩事件之交集為空集合($\varnothing$)，或交集之機率為 0 [$P(A\cap B)=0$]，則 A、B 為互斥事件。
- 例子 1：自 52 張撲克牌中抽取 2 張牌(抽出後不放回)。設事件 A 為『抽取的第 1 張牌為老 K』，事件 B 為『抽取的第 2 張牌為老 K』，則事件 A 與 B 為相依事件。
  因為 $P(A)=\frac{4}{52}$、$P(B)=\frac{4}{52}\times\frac{3}{51}+\frac{48}{52}\times\frac{4}{51}=\frac{1}{13}$、$P(A\cap B)=\frac{4}{52}\times\frac{3}{51}$，很明顯地，$P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$，故 A 與 B 為相依事件。

- 例子 2：自 52 張撲克牌中抽取 2 張牌(抽出後放回)。設事件 A 為『抽取的第 1 張牌為老 K』，事件 B 為『抽取的第 2 張牌為老 K』，則事件 A 與 B 為獨立事件。
  因為 $P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$、$P(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$、$P(A\cap B)=\frac{4}{52}\times\frac{4}{52}=\frac{1}{13}\times\frac{1}{13}$，很明顯地，$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$，故 A 與 B 為獨立事件。
- 例子 3：自 52 張撲克牌中抽取 1 張牌，假設事件 A 為『出現老 K』，事件 B 為『出現人頭 J、Q、K』，事件 C 為『出現 A』。
  由於 $A\cap B=\{出現老K\}$，$P(A\cap B)=\frac{4}{52}$，故 A、B 不為互斥事件。
  由於 $A\cap C=\varnothing$，$P(A\cap C)=0$，故 A、C 為互斥事件。
  由於 $B\cap C=\varnothing$，$P(B\cap C)=0$，故 B、C 為互斥事件。

事件機率的運算法則

- **餘集合的機率**：設 A 為某一事件，其餘集合 $\bar{A}$ 發生的機率為
  $P(\bar{A})=1-P(A)$

  - ➢ 其他與餘集合機率相關的性質：
    (1) $P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)$
    (2) $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$
    (3) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)$
- **加法定理**：A、B 兩事件之聯集的機率可計算為
  $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
  如果進一步假設事件 A 與事件 B 互斥[$P(A\cap B)=0$]，則
  $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
  - ➢ 例子：企業徵才重視哪些條件？若某次調查結果顯示，54%重視溝通能力，79%重視團隊精神，48%兩者皆重視。試問企業至少重視一種條件的機率？
    定義　　事件 A：重視溝通能力
    　　　　事件 B：重視團隊精神
    由題意可知，$P(A)=0.54$、$P(B)=0.79$、$P(A\cap B)=0.48$，
    故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.54+0.79-0.48=0.85$

- **乘法定理**：A、B 兩事件之交集的機率可計算為

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)=P(A)\cdot P(B|A)$$

如果 A、B 獨立[$P(A|B)=P(A)$]，則 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$。

- **分割定理(條件機率的情形)**：若 $A_1,\cdots,A_r$ 為分割集合，B 為一事件，則 $P(B)=\sum_{i=1}^{r}P(B\cap A_i)$，且因 $P(B\cap A_i)=P(A_i)\cdot P(B|A_i)$，故

$$P(B)=\sum_{i=1}^{r}P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{r}P(A_i)\cdot P(B|A_i)$$

  - 例子：依據教育部的統計資料得知，45 歲以上男性人口中具大學以上學歷佔 13.04%，非大學以上學歷佔 86.96%。假設調查得知，父親具大學以上學歷而小孩亦具大學以上學歷的機率為 0.82，父親不具大學以上學歷而小孩亦不具大學以上學歷的機率為 0.23。現在若隨便抽取 1 個小孩，其為大學以上學歷的機率有多少？

    定義　A_1：45 歲以上男性人口中具大學以上學歷

    　　　A_2：45 歲以上男性人口中不具大學以上學歷

則 A_1 與 A_2 為分割集合，且 $P(A_1)=0.1304$、$P(A_2)=0.8696$。

令事件 B：某人具有大學以上學歷。則由題意知

$P(\text{孩子具大學以上學歷}|\text{父親具大學以上學歷})=P(B|A_1)=0.82$

$P(\text{孩子不具大學以上學歷}|\text{父親不具大學以上學歷})=P(\bar{B}|A_2)=0.23$

因此

$P(\text{孩子具大學以上學歷}|\text{父親不具大學以上學歷})=P(B|A_2)=0.77$

由此可知

$$\begin{aligned}P(B)&=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)\\&=P(A_1)\bullet P(B|A_1)+P(A_2)\bullet P(B|A_2)\\&=0.1304\times 0.82+0.8696\times 0.77=0.776\end{aligned}$$

- 其餘機率運算常用的定理[利用分配律]
  - $P((A\cap B)\cup C)=P((A\cup C)\cap(B\cup C))$
  - $P((A\cup B)\cap C)=P((A\cap C)\cup(B\cap C))$

- 有趣的性質：若事件 A 與 B 獨立，則 $\bar{A}$ 與 $\bar{B}$ 獨立、$\bar{A}$ 與 B 獨立、A 與 $\bar{B}$ 獨立。

[證明]

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\cap\bar{B})&=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\\&=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]\\&=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)\\&=[1-P(A)][1-P(B)]=P(\bar{A})P(\bar{B})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\cap B)&=P(B)-P(A\cap B)\\&=P(B)-P(A)P(B)\\&=[1-P(A)]P(B)=P(\bar{A})P(B)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A\cap\bar{B})&=P(A)-P(A\cap B)\\&=P(A)-P(A)P(B)\\&=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\bar{B})\end{aligned}$$

貝氏定理(Bayes' Theorem)

- 條件機率是在某事件 B 已知的情況下，發生 A 事件的機率。
  - 條件機率可看成已經知道一個起始的或事前的機率 $P(A)$，然後經由樣本的調查試驗得到新的資訊(B 事件)，再利用此新資訊將事前的機率加以修正，而得出事後的機率 $P(A|B)$
  - 貝氏定理即是說明如何由新資訊修正事前機率而得到事後機率的方法。
- 例子：海山唱片公司現在正要推出一張新的唱片，根據過去的經驗，推出的新唱片有 60%是成功的，有 40%是失敗的。
  - 定義　事件 A_1：上市成功

    　　　事件 A_2：上市失敗

    因此，$P(A_1)=0.6$、$P(A_2)=0.4$。

上市情況	機率
成功	0.6
失敗	0.4
合計	1.00

- 該公司在推出新唱片之前，都會進行市場調查。根據過去經驗，若推出成功，調查結果客戶(歌迷)喜歡的機率為 90%，不喜歡的機率為 10%，反之，若推出失敗，調查結果客戶喜歡的機率為 30%，不喜歡的機率為 70%。

	上市成功（A_1）	上市失敗（A_2）
客戶喜歡（B）	0.90	0.30
客戶不喜歡（$\bar{B}$）	0.10	0.70
合計	1.00	1.00

定義　事件 B：調查報告為客戶(歌迷)喜歡

　　　事件 $\bar{B}$：調查報告為客戶(歌迷)不喜歡

根據以上數據可知　$P(B|A_1)=0.9$、$P(\bar{B}|A_1)=0.1$

　　　　　　　　　$P(B|A_2)=0.3$、$P(\bar{B}|A_2)=0.7$

- 海山唱片關心的應該是，調查報告為客戶喜歡而上市會成功的機率 $P(A_1|B)$，以及調查報告為客戶喜歡而上市會失敗的機率 $P(A_2|B)$。

- $P(A_1|B)$ 與 $P(A_2|B)$ 是經過 B 事件(市場調查報告為客戶喜歡)後，修正事件 A_1 與 A_2 發生之機率，故稱為事後機率；而這些機率都是條件機率。貝氏定理的精神正是如此。

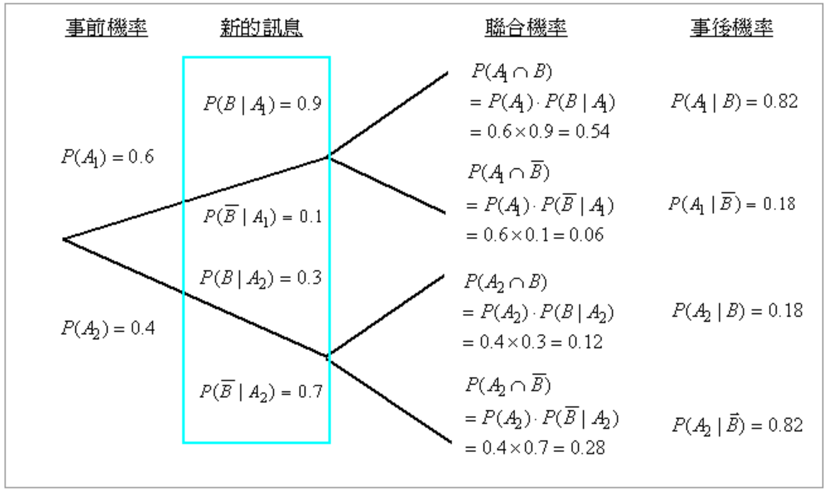
事前機率 → 取得新資訊 → 應用貝氏定理 → 事後機率

- 欲計算事後機率[為一條件機率]，必須先計算 $P(B\cap A_1)$、$P(\bar{B}\cap A_1)$、$P(B\cap A_2)$、$P(\bar{B}\cap A_2)$ 等聯合機率。

$$P(B\cap A_1)=P(B|A_1)P(A_1)=0.9\times0.6=0.54$$
$$P(\bar{B}\cap A_1)=P(\bar{B}|A_1)P(A_1)=0.1\times0.6=0.06$$
$$P(B\cap A_2)=P(B|A_2)P(A_2)=0.3\times0.4=0.12$$
$$P(\bar{B}\cap A_2)=P(\bar{B}|A_2)P(A_2)=0.7\times0.4=0.28$$

	上市成功（A_1）	上市失敗（A_2）	
客戶喜歡（B）	$P(B\cap A_1)=0.54$	$P(B\cap A_2)=0.12$	$P(B)=0.66$
客戶不喜歡（$\bar{B}$）	$P(\bar{B}\cap A_1)=0.06$	$P(\bar{B}\cap A_2)=0.28$	$P(\bar{B})=0.34$
	$P(A_1)=0.60$	$P(A_2)=0.40$	1.00

- 貝氏定理的樹枝圖



- 因此調查報告為客戶喜歡而上市會成功的機率 $P(A_1|B)$ 為

$$P(A_1|B)=\frac{P(B\cap A_1)}{P(B)}=\frac{0.54}{0.66}=0.82$$

調查報告為客戶喜歡而上市會失敗的機率 $P(A_2|B)$

$$P(A_2|B)=\frac{P(B\cap A_2)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.66}=0.18$$

- 在市場調查前，只知上市成功的機率為 0.6 [失敗的機率為 0.4]；若市場調查報告為客戶喜歡，則可將上市成功的機率往上修正為 0.82 [失敗的機率往下修正為 0.18]。

- 貝氏定理：若已知 $A_1,\cdots,A_r$ 為樣本空間的分割集合，B 為某事件，且已知 $P(A_i)$ 及 $P(B|A_i)$，則 B 條件下發生事件 A_i 之機率表為 $P(A_i|B)$：

$$P(A_i|B)=\frac{P(B\cap A_i)}{P(B)}=\frac{P(B\cap A_i)}{P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\cdots+P(B\cap A_r)}$$
$$=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_r)P(B|A_r)}$$

式中：$P(A_i)$：事前機率，$P(B|A_i)$：概似機率，$P(A_i|B)$：事後機率。