第 12 章　假設檢定(Hypothesis Testing)

- 茶葉製造商宣稱其所生產之『烏龍茶每罐平均重量 300 公克』。
  - 現在隨機抽取 5 罐茶葉作為樣本來檢驗，發現 5 罐烏龍茶的平均重量為 296 公克。據此結果，我們可以逕行宣稱『烏龍茶的平均重量小於 300 公克，該製造商欺騙消費者』嗎？
  - 答案是『不可以』。因為樣本平均數 $\overline{X}=296$ 公克乃是根據一組樣本所計算出，樣本平均數 $\overline{X}=296$ 公克有可能真的來自於平均數為 300 公克的母體，而樣本平均數($\overline{X}=296$ 公克)與母體平均數(300 公克)的差異僅是抽樣誤差的結果。
  - 樣本估計值與母體參數假設值存在差異的原因可能有二：『抽樣誤差所造成的差異』或『母體參數假設值錯誤』。假設檢定基本上就是判斷樣本估計值與母體參數假設值之差距到底應是<u>抽樣誤差所造成</u>，或是<u>假設值根本是錯誤的</u>。

- **假設檢定**：先對母體參數(母體特性)提出某一假設(hypothesis)或主張(claim)，然後根據我們從樣本中獲得的樣本統計量，去檢定(test)母體參數是否符合此一假設，以決定接受(不拒絕 not reject)該假設或拒絕(reject)該假設的統計方法。
  - 假設：針對母體參數作某種假定或猜測。
  - 檢定：是一種統計推論方法，其目的在建立一套拒絕或接受假設的統計法則。

假設檢定的基本觀念

- 兩個假設：進行檢定時必須設定兩個『互斥』的假設
  - **虛無假設**(null hypothesis) H_0：對母體參數的某一假設或主張[預先假定虛無假設為真實；除非找到證據證明虛無假設是錯誤的，否則須無假設就是真的]。
  - **對立假設**(alternative hypothesis) H_1：對立假設是相對於虛無假設而對母體參數提出的另一個不同的假設或主張。[證明對立假設為正確時即可拒絕虛無假設]

- 例子：檢驗茶葉製造商宣稱的主張『烏龍茶每罐平均重量 300 公克』是否正確，可將虛無假設與對立假設設定為

  $H_0:\mu=300$　[製造商的宣稱為真]

  $H_1:\mu<300$　[製造商的宣稱不正確]
  - 虛無假設與對立假設<u>僅其中之一正確</u>。而假設檢定就是在判斷到底哪一個是正確的。
  - 許多教科書用了另一種設定虛無假設與對立假設的寫法 $H_0:\mu\geq 300$ 、$H_1:\mu<300$ ，虛無假設為不等式；這兩個假設亦為互斥，而這種寫法也沒錯，但我偏好把虛無假設對母體參數的主張都寫成等式。
  - 主要的原因是：假設檢定僅能找出支持對立假設的證據，所以上述兩種虛無假設的寫法其實沒有差別，因為假設檢定希望證明的是對立假設 $H_1:\mu<300$ 是正確的，而且不管虛無假設是何種寫法，都不影響假設檢定結果。

- 兩個決策：在設定完兩個假設後，我們就必須根據樣本的資訊來判斷到底哪個假設是正確的。在進行判斷時，我們會預先假定虛無假設是正確的，在此假設下推導出樣本統計量的抽樣分配，並根據樣本統計量的抽樣分配決定我們所能容忍的抽樣誤差範圍，將樣本統計量的實現值區分成**接受域**(acceptance region; **非拒絕域** nonrejection region)與**拒絕域**(rejection region)；接受域代表<u>抽樣誤差在可容許範圍</u>[樣本統計量與母體參數假設值的差異可歸因於抽樣誤差]，拒絕域則代表<u>抽樣誤差超出可容許範圍</u>[樣本統計量與母體參數假設值的差異無法歸因於抽樣誤差，亦即應是母體參數假設值錯誤了]。
  - 不拒絕 H_0 (或接受 H_0)：若樣本統計量落在接受域，則「不拒絕」或「接受」虛無假設。
  - 拒絕 H_0：若樣本統計量落在拒絕域，則「拒絕」虛無假設，推斷對立假設 H_1 為真。

- 例如：我們想檢定一個母體的平均數是否比 $\mu_0(=300)$ 小，因此設定了底下的虛無假設與對立假設

$$H_0: \mu = \mu_0 (=300) \quad \text{vs.} \quad H_1: \mu < \mu_0 (=300)$$

  - 假設母體為常態，且變異數已知為 σ^2。我們從母體中抽出一組觀察值個數為 n 的隨機樣本，以樣本平均數 $\bar{X}$ 來驗證上述兩個假設哪個正確；當母體平均數真的為 $\mu_0(=300)$ 時，樣本平均數具有 $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$ 分配，而且我們也知道

$$P\left(-1.645 \le \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

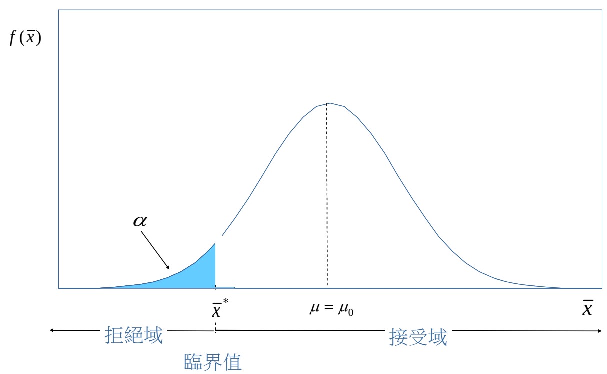
這就表示『標準化的抽樣誤差 $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 有 0.95 的機率會大於 -1.645』(這當然就等同於『標準化的抽樣誤差 $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 有 0.05 的機率會小於-1.645』)。上式可改寫為

$$P\left(\mu_0 - 1.645\sigma/\sqrt{n} \le \bar{X}\right) = 0.95$$

令 $\bar{X}^* = \mu_0 - 1.645\sigma/\sqrt{n}$，上式表示『若母體平均數真的是 μ_0，則樣本平均數 $\bar{X}$ 有 0.95 的機率會大於 $\bar{X}^*$，僅有 0.05 的機率會小於 $\bar{X}^*$』。據此我們可把接受域與拒絕域設為

接受域：$\bar{X} \ge \bar{X}^*$　[抽樣誤差在可容忍的範圍之內]

拒絕域：$\bar{X} < \bar{X}^*$　[抽樣誤差超出可容忍範圍；計算出的樣本平均數比母體平均數假設值 μ_0 小太多了]



  - 我們將接受域與拒絕域的分界點(此例中為 $\bar{X}^*$)稱為**臨界點**(critical point)或**臨界值**(critical value)。
  - 拒絕域的意思：在考量樣本平均數的抽樣誤差後，$\bar{X}$ 有 0.95 的機率會大於 $\bar{X}^*$ (若 $\bar{X}$ 落在此範圍，表示抽樣誤差尚在可接受範圍)，僅有 0.05(很小)的機率會小於 $\bar{X}^*$，我們就將這種發生機率極低的情況定義為<u>虛無假設出現錯誤的證據</u>(亦即抽樣誤差不在我們可接受的範圍)。
  - 若我們所計算出的樣本統計量位於拒絕域內，即拒絕虛無假設，若樣本統計量位於接受域內，則接受虛無假設。

- 由於樣本平均數的抽樣分配為 $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$，其值域應介於 $\pm\infty$ 之間，亦即 $\bar{X}$ 應該是什麼數值都可能發生[多大的抽樣誤差都可能發生]，但我們卻把拒絕域 $\bar{X} < \bar{X}^*$ 定義為虛無假設 $H_0: \mu = \mu_0$ 錯誤的證據[拒絕域所包含的抽樣誤差發生機率有 5%]。因此假設檢定可能發生錯誤：『虛無假設是對的，但我們卻拒絕虛無假設』，當然亦可能『虛無假設是錯的，但我們卻接受虛無假設』。

- 兩個錯誤：
  - **型 I 錯誤**(type I error)：當 H_0 為真，但假設檢定的結論卻拒絕 H_0 所發生的錯誤。型 I 錯誤的機率為 α，表為

$$\alpha = P(\text{I}) = P(\text{拒絕}H_0 \,|\, H_0\text{為真})$$

α 又稱為為**顯著水準**(significance level)。

  - **型 II 錯誤**(type II error)：當 H_0 為假(亦即 H_1 為真)，但假設檢定的結論卻不拒絕 H_0 所發生的錯誤。型 II 錯誤的機率以 β 表示：

$$\beta = P(\text{II}) = P(\text{不拒絕}H_0 \,|\, H_0\text{為假})$$

$1-\beta$ 稱為**檢定力**，表示 H_1 為真的情況下拒絕 H_0 的機率。

		真實情況	
		H_0 爲真	H_1 爲真
決策	不拒絕 H_0	$1-\alpha$（正確機率）	β（錯誤機率）
	拒絕 H_0	α（錯誤機率）	$1-\beta$（正確機率）

- 例子：在前述檢定中

  $$H_0: \mu = \mu_0 (= 300) \qquad \text{vs.} \qquad H_1: \mu < \mu_0 (= 300)$$

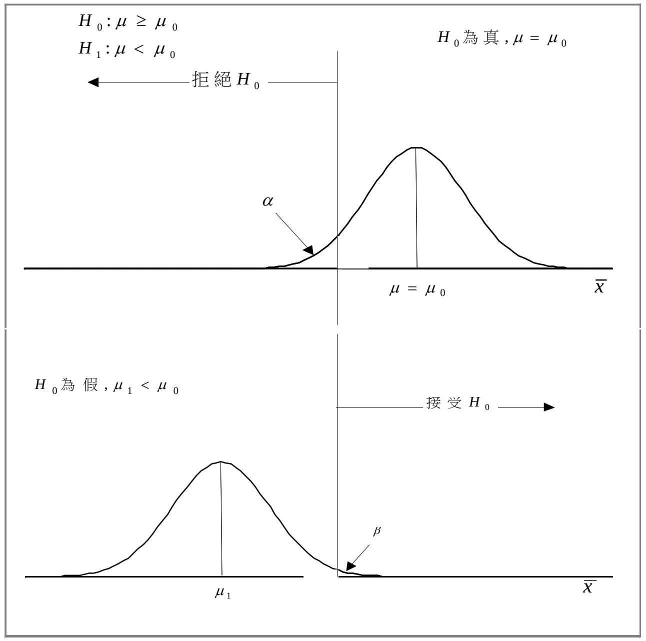
  我們根據虛無假設正確時樣本平均數 $\bar{X}$ 的抽樣分配，將 $\bar{X}$ 的實現值區分成

  接受域： $\bar{X} \ge \bar{X}^*$ [機率有 95%]

  拒絕域： $\bar{X} < \bar{X}^*$ [機率有 5%]

  因此，當虛無假設真的是正確的情況下，我們有 5%的機率會錯誤地拒絕虛無假設，亦即型 I 錯誤的機率 $\alpha = 5\%$ 。

  反之，若實際的母體平均數為 $\mu = 299$ ，亦即虛無假設錯誤，對立假設才是正確的；從平均數為 $\mu = 299$ 的母體所抽出的樣本，其樣本平均值 $\bar{X}$ 當然有機會大於 $\bar{X}^*$ [亦即落於接受域；參見下頁圖]，此時我們會錯誤地接受虛無假設，因而做出錯誤的結論，這種錯誤結論就稱為型 II 錯誤，型 II 錯誤發生的機率以 β 表示[要計算型 II 錯誤發生的機率 β 並非簡單的事]。



- 型 I 錯誤 α 與型 II 錯誤 β 的關係：
  - 在假設檢定中，型 I 錯誤與型 II 錯誤的發生是無可避免的，然而，我們當然希望錯誤的機率 α 與 β 越小越好。
  - 但我們無法將 α 與 β 同時降低：當型 I 錯誤 α 變小時，型 II 錯誤 β 一定無可避免地會變大。
  - 假設檢定的慣例：僅決定 α 的大小(犯型 I 錯誤可容許的最大機率)，而型 II 錯誤 β 的機率則不管了。
- 顯著水準(significance level)：型 I 錯誤的機率 α 通常又稱為顯著水準；理由是，若樣本統計量的觀察值落入拒絕域，我們即認為真實的母體參數跟虛無假設所描述的母體參數值應有<u>**顯著差異**</u>[統計學把這種顯著差異稱為統計上的顯著差異(statistically significant difference)]。
  - 統計學慣用三種顯著水準： $\alpha = 1\%$ 、 $\alpha = 5\%$ 、 $\alpha = 10\%$ 。
  - 若在主觀上認為犯型 I 錯誤的成本極高，應挑選較小的 α 。

  - 當我們選定了顯著水準，即已決定出臨界值，因此拒絕域與接受域亦隨之決定。
  - 當然，不同的顯著水準會決定出不同的拒絕域與接受域。
- **注意**：嚴格說起來，我們並無法證明虛無假設是正確的。茲舉一例說明
  - 當我們在檢定 $H_0: \mu = 300$ vs. $H_1: \mu < 300$，也許因為樣本統計量 $\bar{X} = 299.5$ 落在接受域，因此無證據顯示虛無假設錯誤；但 $\bar{X} = 299.5$ 的樣本統計量也極有可能是由 $\mu = 299$ 的母體所產生的，若我們檢定 $H_0: \mu = 299$ vs. $H_1: \mu < 299$ 這組假設，也許同樣無法拒絕虛無假設。所以問題就出現了： $\mu = 300$ 跟 $\mu = 299$ 到底哪個正確。
  - 所以統計學比較傾向於說『無法拒絕虛無假設』(找不到虛無假設錯誤的證據)，較不喜歡說『接受虛無假設』。但卻會直接說『接受對立假設』。

一尾檢定(one-tailed test)與雙尾檢定(two-tailed test)

- **左尾檢定**(left-tailed test)：在檢定底下的假設時

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1: \mu < \mu_0$$

我們將拒絕域定義為虛無分配左邊尾端的部份。

為什麼不是右邊尾巴的部份？

由於 H_0 成立時，樣本平均數具有 $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$ 分配，因此

$$P\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le 1.645\right) = 0.95 \Rightarrow P\left(\bar{X} \le \mu_0 + 1.645\sigma/\sqrt{n}\right) = 0.95$$

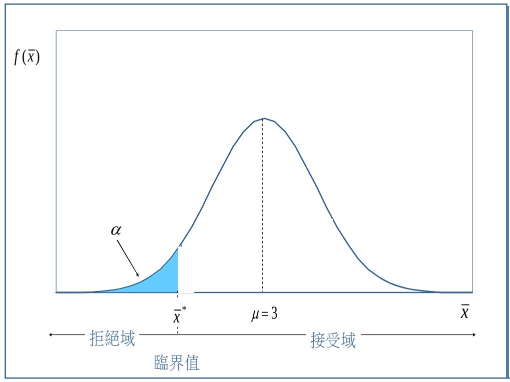
令 $\bar{X}^{**} = \mu_0 + 1.645\sigma/\sqrt{n}$ ，上式表示『若母體平均數真的是 μ_0 ，則樣本平均數 $\bar{X}$ 有 0.95 的機率會小於 $\bar{X}^{**}$ ，僅有 0.05 的機率會大於 $\bar{X}^{**}$ 』。所以如果我們可把接受域與拒絕域設為

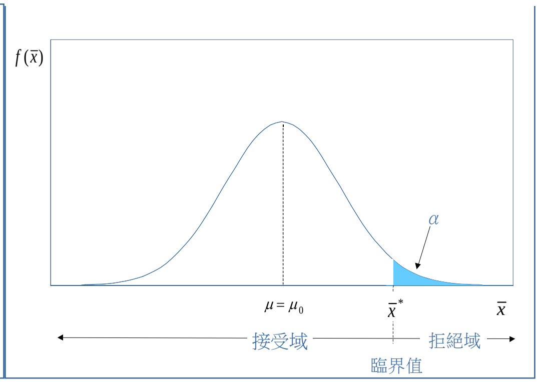
接受域： $\bar{X} \le \bar{X}^{**}$

拒絕域： $\bar{X} > \bar{X}^{**}$

當計算出的樣本統計量位於拒絕域內，我們依舊可以拒絕虛無假設啊！但為什麼不這樣設定？

- 因為拒絕虛無假設時，代表對立假設是正確的。若所計算出的樣本統計量真的落於拒絕域 $\bar{X} > \bar{X}^{**}$ ，真實的母體平均數絕對不會是小於 μ_0 [而是大於 μ_0]。所以如果把拒絕域設定成虛無分配的右尾，當我們拒絕虛無假設時，無法提供證據證明對立假設 $H_1: \mu < \mu_0$ 是對的。





- **右尾檢定**(right-tailed test)：若檢定時考慮的是底下這組假設

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1: \mu > \mu_0$$

拒絕域就該設定成虛無分配的右尾。[計算出的樣本統計量比母體參數假設值大很多時我們才說虛無假設錯誤並接受對立假設]

- **雙尾檢定**(two-tailed test)：若檢定時考慮的是底下這組假設

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1: \mu \ne \mu_0$$

不管計算出的樣本統計量比母體參數假設值大很多或小很多時，我們都可拒絕虛無假設並接受對立假設；此時拒絕域就可設定成虛無分配的兩個尾端。

  - 若我們將顯著水準設定成 $\alpha = 0.05$，則根據樣本統計量的虛無分配 $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$ ，我們知道

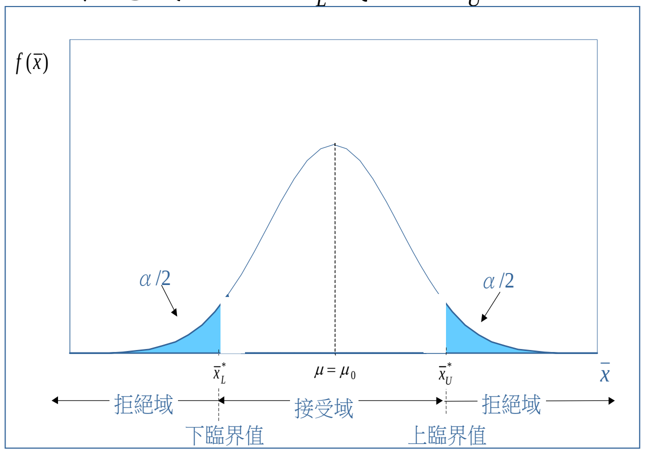
$$P\left(-1.96 \le \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le 1.96\right) = 0.95$$

$$\Rightarrow P\left(\mu_0 - 1.96\sigma/\sqrt{n} \le \bar{X} \le \mu_0 + 1.96\sigma/\sqrt{n}\right) = 0.95$$

據此可將接受域與拒絕域設為[令 $\bar{X}_L^* = \mu_0 - 1.96\sigma/\sqrt{n}$ 、 $\bar{X}_U^* = \mu_0 + 1.96\sigma/\sqrt{n}$]

接受域： $\bar{X}_L^* \le \bar{X} \le \bar{X}_U^*$

拒絕域： $\bar{X} < \bar{X}_L^*$ 或 $\bar{X} > \bar{X}_U^*$



- 在進行假設檢定時，我們有三種不同的對立假設設定方式，這三種不同設定方式導致了底下的三組假設[以平均數檢定為例]

雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$

  - 注意：假設檢定中的假設是『**對母體參數的假設**』，千萬不要把它寫成對樣本統計量的假設(如 $\bar{X}=\mu_0$ 是錯誤的)。
  - 注意：並非所有假設檢定的問題都有三種設定假設的方式
- 這三組假設的總整理如下[虛無假設與課本不同]

	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 H_0 的符號	＝	＝	＝
對立假設 H_1 的符號	$\neq$	$<$	$>$
拒絕域	在左右雙尾	在左尾	在右尾
α 值	$\alpha/2$	α	α

- 假設檢定的步驟：
  - 步驟 1　設立兩個假設
  - 步驟 2　選擇檢定統計量[當然要挑選好的統計量]
  - 步驟 3　決定拒絕域及接受域(行動法則或決策法則)
  - 步驟 4　計算檢定統計量(或將檢定統計量與臨界值比較)
  - 步驟 5　下結論

母體平均數的假設檢定－非常態母體

- 抽樣分配：若隨機樣本 $X_1,\dots,X_n$ 來自 (μ,σ^2) 的(非常態)母體，則標準化的樣本平均數具有底下的近似分配
  - 若母體變異數 σ^2 已知

    $$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\approx N(0,1)$$

  - 若母體變異數 σ^2 未知[S 為樣本標準差]

    $$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\approx N(0,1)$$

- 在進行檢定時有底下三種(對立)假設設定方式：

雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$

- ***Z* 值法(標準統計量檢定法)**：它是先將檢定統計量化為標準檢定統計量，然後再進行檢定的方法。

  當母體變異數 σ^2 已知時，標準化的樣本平均數為 $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

  當母體變異數 σ^2 未知時，標準化的樣本平均數為 $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$

  因此 $Z\approx N(0,1)$

  - **左尾檢定**：若顯著水準設定為 α，則根據 $Z\approx N(0,1)$

    $P(-Z_\alpha\le Z)=1-\alpha$　或　$P(Z<-Z_\alpha)=\alpha$

    接受域：$Z\ge -Z_\alpha$

    拒絕域：$Z<-Z_\alpha$

    決策法則：若 $Z\ge -Z_\alpha$，則接受虛無假設。若 $Z<-Z_\alpha$，則拒絕虛無假設(並接受對立假設)。

  - **右尾檢定**：若顯著水準設定為 α，則根據 $Z\approx N(0,1)$

    $P(Z\le Z_\alpha)=1-\alpha$　或　$P(Z>Z_\alpha)=\alpha$

    接受域：$Z\le Z_\alpha$

    拒絕域：$Z>Z_\alpha$

    決策法則：若 $Z\le Z_\alpha$，則接受虛無假設。反之，若 $Z>Z_\alpha$，則拒絕虛無假設(並接受對立假設)。

  - **兩尾檢定**：若顯著水準設定為 α，則根據 $Z\approx N(0,1)$

    $P(-Z_{\alpha/2}\le Z\le Z_{\alpha/2})=1-\alpha$　或　$P(Z>Z_{\alpha/2}\text{或}Z<-Z_{\alpha/2})=\alpha$

    接受域：$-Z_{\alpha/2}\le Z\le Z_{\alpha/2}$

    拒絕域：$Z>Z_{\alpha/2}$　或　$Z<-Z_{\alpha/2}$

    決策法則：若 $-Z_{\alpha/2}\leqq Z\le Z_{\alpha/2}$，則接受虛無假設。反之，若 $Z<-Z_{\alpha/2}$ 或 $Z>Z_{\alpha/2}$，則拒絕虛無假設(接受對立假設)。

- 例子(12.2)：美國大學生每門學科的學習時間平均每週至少 3 小時，林教授想了解台灣大學生的學習時間是否較低。抽取 36 個學生調查其每週的學習時間後，得知平均數為 2.748 小時，標準差為 1.696 小時。請檢定台灣大學生每週平均的學習時間是否小於 3 小時？($\alpha = 0.05$)
  - 令 μ 代表台灣大學生每週平均的學習時間，由題意知

    $n = 36$ 、 $\bar{X} = 2.748$ 、 $S = 1.696$ 、 $\mu_0 = 3$ 、非常態母體
  - 步驟 1：設立兩個假設

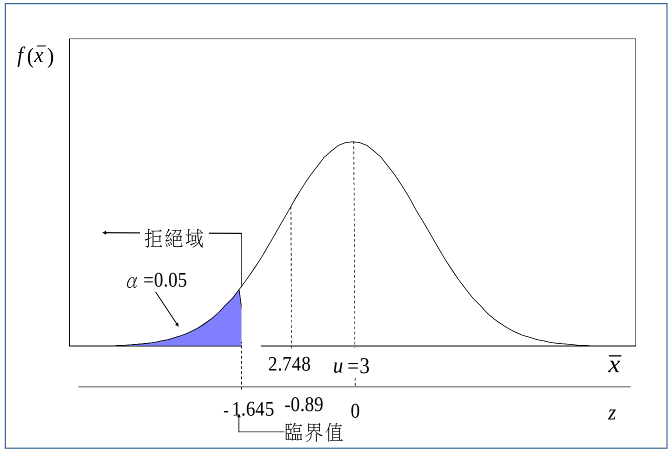
    $H_0 : \mu = 3$　[學習時間不小於(至少)3 小時]

    $H_1 : \mu < 3$　[學習時間小於 3 小時]
  - 步驟 2：選擇檢定統計量。以樣本平均數 $\bar{X}$ 來進行檢定；由於題目並未對母體分配進行假設，且母體變異數亦未知，因此標準化的樣本平均數 $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$ 。

  - 步驟 3：決定拒絕域及接受域。根據 $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$ 分配可知臨界值 $-Z_{0.05} = -1.645$ ，故將接受域與拒絕域設定為

    接受域： $Z \geq -1.645$

    拒絕域： $Z < -1.645$



  - 步驟 4：計算檢定統計量。標準化的樣本統計量為

    $$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{2.748-3}{1.696/\sqrt{36}} = \frac{-0.252}{0.283} = -0.890$$
  - 步驟 5：下結論。由於檢定統計量的觀察值 $Z = -0.890$ ，比臨界值 $-Z_{0.05} = -1.645$ 大，落在接受域，故不拒絕虛無假設。因此我們的結論是：『在 5%的顯著水準下，我們無法拒絕台灣大學生每週平均學習時間至少 3 個小時的假設』。

- 例子(12.3)：某餐廳考慮開設新的分店，根據專業分析得知，餐廳地點必須設定在人潮多，每小時平均至少有 100 人聚集的地點。該餐廳的企劃經理在該地點觀察了 40 個小時，得到每小時平均行人為 106 人，樣本標準差為 10.7 人，請問該地點是否適合開店？(顯著水準 $\alpha = 0.05$)
  - 由題意得知： $n = 40$ 、 $\bar{X} = 106$ 、 $S = 10.7$ 、 $\mu_0 = 100$ 、非常態母體。

  - 虛無假設與對立假設[右尾檢定]

    $H_0 : \mu = 100$　[平均行人人數等於 100 人]

    $H_1 : \mu > 100$　[平均行人人數大於 100 人]
  - 由於母體非常態，且變異數未知，因此

    $$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$$
  - 在 $\alpha = 0.05$ 的顯著水準下，根據 Z 的分配可將接受域與拒絕域分別設定為

    接受域： $Z \leq 1.645$

    拒絕域： $Z > 1.645$
  - 根據樣本資訊可計算出 Z 統計量為

    $$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{106-100}{10.7/\sqrt{40}} = \frac{6}{1.692} = 3.55$$
  - 由於檢定統計量 $Z = 3.55$ 大於臨界值 1.645，位於拒絕域內，故拒絕虛無假設，接受對立假設；亦即『該地點每小時平均人數大於 100 人，可作為新餐廳的營業地點』。

- **非標準統計量檢定法(課本稱為臨界值檢定法)**：我們已知在非常態母體，給定顯著水準 α 時的 Z 檢定決策準則。

檢定	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 對立假設	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$
接受域 拒絕域	$-Z_{\alpha/2}\le Z\le Z_{\alpha/2}$ $Z<-Z_{\alpha/2}$ 或 $Z>Z_{\alpha/2}$	$Z\ge -Z_{\alpha}$ $Z<-Z_{\alpha}$	$Z\le Z_{\alpha}$ $Z>Z_{\alpha}$

➢ 若母體變異數已知時，$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$，故上述三種檢定的決策法則(接受域)又可改寫為

雙尾檢定：$-Z_{\alpha/2}\le Z\le Z_{\alpha/2}\Rightarrow -Z_{\alpha/2}\le\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\le Z_{\alpha/2}$

$\Rightarrow \mu_0-Z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}\le\bar{X}\le\mu_0+Z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}$

左尾檢定：$Z\ge -Z_{\alpha}\Rightarrow\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\ge Z_{\alpha}\Rightarrow\bar{X}\ge\mu_0-Z_{\alpha}\cdot\sigma/\sqrt{n}$

右尾檢定：$Z\le Z_{\alpha}\Rightarrow\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\le Z_{\alpha}\Rightarrow\bar{X}\le\mu_0+Z_{\alpha}\cdot\sigma/\sqrt{n}$

檢定	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
接受域 拒絕域	$\bar{X}_L^*\le\bar{X}\le\bar{X}_U^*$ $\bar{X}<\bar{X}_L^*$ 或 $\bar{X}>\bar{X}_U^*$ 其中 $\bar{X}_L^*=\mu_0-Z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}$ $\bar{X}_U^*=\mu_0+Z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}$	$\bar{X}\ge\bar{X}^*$ $\bar{X}<\bar{X}^*$ 其中 $\bar{X}^*=\mu_0-Z_{\alpha}\cdot\sigma/\sqrt{n}$	$\bar{X}\le\bar{X}^{**}$ $\bar{X}>\bar{X}^{**}$ 其中 $\bar{X}^{**}=\mu_0+Z_{\alpha}\cdot\sigma/\sqrt{n}$

➢ 若母體變異數未知時，$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，故上述三種檢定的決策法則(接受域)又可改寫為

雙尾檢定：$-Z_{\alpha/2}\le Z\le Z_{\alpha/2}\Rightarrow -Z_{\alpha/2}\le\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\le Z_{\alpha/2}$

$\Rightarrow \mu_0-Z_{\alpha/2}\cdot S/\sqrt{n}\le\bar{X}\le\mu_0+Z_{\alpha/2}\cdot S/\sqrt{n}$

左尾檢定：$Z\ge -Z_{\alpha}\Rightarrow\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\ge Z_{\alpha}\Rightarrow\bar{X}\ge\mu_0-Z_{\alpha}\cdot S/\sqrt{n}$

右尾檢定：$Z\le Z_{\alpha}\Rightarrow\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\le Z_{\alpha}\Rightarrow\bar{X}\le\mu_0+Z_{\alpha}\cdot S/\sqrt{n}$

檢定	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
接受域 拒絕域	$\bar{X}_L^*\le\bar{X}\le\bar{X}_U^*$ $\bar{X}<\bar{X}_L^*$ 或 $\bar{X}>\bar{X}_U^*$ 其中 $\bar{X}_L^*=\mu_0-Z_{\alpha/2}\cdot S/\sqrt{n}$ $\bar{X}_U^*=\mu_0+Z_{\alpha/2}\cdot S/\sqrt{n}$	$\bar{X}\ge\bar{X}^*$ $\bar{X}<\bar{X}^*$ 其中 $\bar{X}^*=\mu_0-Z_{\alpha}\cdot S/\sqrt{n}$	$\bar{X}\le\bar{X}^{**}$ $\bar{X}>\bar{X}^{**}$ 其中 $\bar{X}^{**}=\mu_0+Z_{\alpha}\cdot S/\sqrt{n}$

- 例子(12.1)：我們現在來檢定『烏龍茶每罐平均重量 300 公克』是否正確。假設抽取 $n=36$ 罐烏龍茶樣本所得到的樣本平均重量為 $\bar{X}=296$，樣本標準差為 $S=7.36$，顯著水準 $\alpha=0.05$。

➢ 虛無假設與對立假設[右尾檢定]

$H_0:\mu=300$　[茶業製造商宣稱為真]

$H_1:\mu<300$　[茶業製造商騙人]

➢ 由於母體非常態，且變異數未知，因此 $Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\approx N(0,1)$

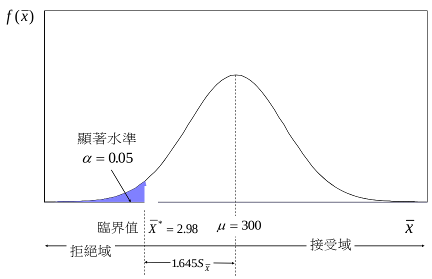
➢ 在 $\alpha=0.05$ 的顯著水準下，根據 Z 的分配可將接受域與拒絕域分別設定為

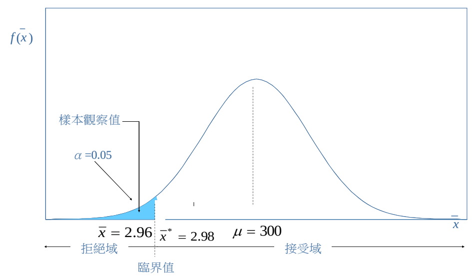
接受域：$Z\ge -1.645\Rightarrow\bar{X}\ge\bar{X}^*$

拒絕域：$Z<-1.645\Rightarrow\bar{X}<\bar{X}^*$

其中 $\bar{X}^*=\mu_0-Z_{\alpha}\cdot S/\sqrt{n}=300-1.645\cdot 7.36/\sqrt{36}\approx 298$

➢ 由於樣本平均數 $\bar{X}=296$ 小於臨界值 $\bar{X}^*=298$，位於拒絕域內，因此拒絕虛無假設，接受對立假設。亦即『茶葉的平均重量小於 300 公克』。





- P 值法(左尾檢定)：在上例的左尾檢定中，我們可以發現到：
  - 拒絕虛無假設：樣本統計量 $\bar{X}=296$ 落在拒絕域，虛無分配小於樣本統計量的機率[稱為 P 值]一定小於顯著水準 α。
  - 接受虛無假設：樣本統計量 $\bar{X}=296$ 落在接受域，虛無分配小於樣本統計量的機率[稱為 P 值]一定大於顯著水準 α。
- P 值法(右尾檢定)：若進行的是右尾檢定，則：
  - 拒絕虛無假設：樣本統計量落在拒絕域，虛無分配大於樣本統計量的機率[P 值]一定小於顯著水準 α。
  - 接受虛無假設：樣本統計量落在接受域，虛無分配大於樣本統計量的機率[P 值]一定大於顯著水準 α。
- P 值法(雙尾檢定)：若進行的是雙尾檢定，則：
  - 拒絕虛無假設：若樣本統計量落在右邊的拒絕域，虛無分配大於樣本統計量的機率一定小於顯著水準的一半 $\alpha/2$，亦即虛無分配大於樣本統計量的機率之 2 倍[P 值]一定小於

顯著水準 α。若樣本統計量落在左邊的拒絕域，虛無分配小於樣本統計量的機率一定小於顯著水準的一半 $\alpha/2$，亦即虛無分配小於樣本統計量的機率之 2 倍[P 值]一定小於顯著水準 α
  - 接受虛無假設：樣本統計量落在接受域，但較靠近右邊的拒絕域時，虛無分配大於樣本統計量的機率一定大於顯著水準的一半 $\alpha/2$，亦即虛無分配大於樣本統計量的機率之 2 倍[P 值]一定大於顯著水準 α。若樣本統計量落在接受域，但較靠近左邊的拒絕域時，虛無分配小於樣本統計量的機率一定大於顯著水準的一半 $\alpha/2$，亦即虛無分配小於樣本統計量的機率之 2 倍[P 值]一定大於顯著水準 α。
- ***P* 值法**：只要我們能妥善地定義左尾檢定、右尾檢定、雙尾檢定的 P 值，則我們可以不再需要根據樣本統計量來進行假設檢定，僅需將 P 值與顯著水準進行比較即可做假設檢定。

- P 值：必須假設虛無假設 H_0 為真，推論檢定統計量的虛無分配。在非常態母體，變異數未知的情況下，欲檢定 $H_0:\mu=\mu_0$ 與各式對立假設。若虛無假設 H_0 為真，則檢定統計量

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\approx N(0,1) \qquad 或 \qquad \bar{X}\approx N(\mu_0,S^2/n)$$

根據這兩個檢定統計量的虛無分配，可計算出 P 值。底下就以 Z 統計量來計算 P 值，假設根據樣本所算出統計量為 Z_0。[課本是以 $\bar{X}$ 來計算，但算出的 P 值完全相同]
  - 左尾檢定的 P 值：計算虛無假設 H_0 成立時檢定統計量 Z 比樣本統計量 Z_0 小的機率，亦即

$$P值=P(Z<Z_0\,|\,H_0為真)=P(Z<Z_0\,|\,\mu=\mu_0)$$

  - 右尾檢定的 P 值：計算虛無假設 H_0 成立時檢定統計量 Z 比樣本統計量 Z_0 大的機率，亦即

$$P值=P(Z>Z_0\,|\,H_0為真)=P(Z>Z_0\,|\,\mu=\mu_0)$$

  - 雙尾檢定的 P 值：若 $Z_0>0$，則

$$P值=2\times P(Z>Z_0\,|\,H_0為真)=2\times P(Z>Z_0\,|\,\mu=\mu_0)$$

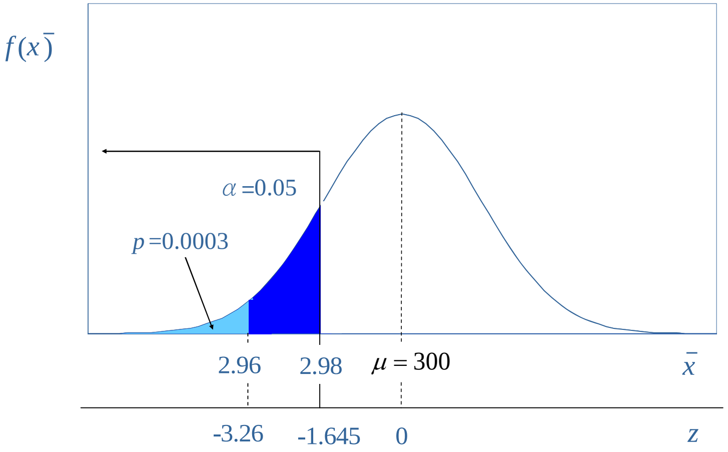
若 $Z_0<0$，則

$$P值=2\times P(Z<Z_0\,|\,H_0為真)=2\times P(Z<Z_0\,|\,\mu=\mu_0)$$

- P 值檢定法的**決策法則**：
  - 若 $P值<\alpha$，則拒絕虛無假設 H_0。
  - 若 $P值\geq\alpha$，則接受虛無假設 H_0。
- **註**：大部分的統計軟體在計算檢定統計量時，都會伴隨算出 P 值；所以從實務的觀點來看，大家僅需知道如何利用 P 值來進行統計推論即可。
- 例子(12.5)：我們回到烏龍茶重量的例子，$n=36$、$\bar{X}_0=296$、$S=7.36$，顯著水準 $\alpha=0.05$；檢定底下的假設

$H_0:\mu=300$ [茶業製造商宣稱為真]
$H_1:\mu<300$ [茶業製造商騙人]

- 以 $\bar{X}$ 作為檢定統計量：當虛無假設 $H_0: \mu = 300$ 為真時，$\bar{X} \approx N(\mu_0, S^2/n) = N(300, 7.36^2/36) = N(300, 1.227^2)$
  根據樣本所算出之樣本平均數為 $\bar{X}_0 = 296$。



由於該檢定為左尾檢定，因此 P 值為

$$P\text{值} = P(\bar{X} < \bar{X}_0 \mid H_0\text{為真}) = P(\bar{X} < \bar{X}_0 \mid \mu = \mu_0)$$
$$= P(\bar{X} < 296 \mid \mu = 300) = P\left(\tfrac{\bar{X}-300}{1.227} < \tfrac{296-300}{1.227}\right)$$
$$= P(Z < -3.26) = 0.5 - 0.49944 = 0.00056$$

由於 $P\text{值} = 0.0003 < 0.05$，小於顯著水準 $\alpha = 0.05$，故拒絕虛無假設。

- 以 Z 作為檢定統計量：當虛無假設 $H_0: \mu = 300$ 為真時，Z 檢定統計量 $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$。
  根據樣本所算出的 Z 統計量為 $Z_0 = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{296-300}{7.36/\sqrt{36}} = -3.26$
  因此 P 值為

$$P\text{值} = P(Z < Z_0 \mid H_0\text{為真}) = P(Z < Z_0 \mid \mu = \mu_0)$$
$$= P(Z < -3.26) = 0.5 - 0.49944 = 0.00056$$

同樣拒絕虛無假設。

- 雖然查常態分配表即可找出此例中的 P 值，但若有 EXCEL 程式，計算 P 值更是容易。EXCEL 中的指令 NORMSDIST 計算的是累積到 Z 時常態分配的累積機率。
  此例中 $P\text{值} = P(Z < -3.26)$，等於是要計算常態分配累積到 -3.26 的機率，在底下的函數引述對話方塊中的 Z 位置輸入 -3.26，即可看到『計算結果＝0.000557061』，這就是這個例子中的 $P\text{值} = P(Z < -3.26)$。

常態母體平均數檢定

- 若母體具常態分配，且變異數 σ^2 已知，則在虛無假設 $H_0: \mu = \mu_0$ 為真時，樣本平均數與標準化的樣本平均數具有底下實際分配

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad \text{或} \qquad \bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$$

  - 假設檢定所需用到的臨界值與決策法則跟『非常態母體』的情況沒有差異。
- 若母體具常態分配，但變異數 σ^2 未知，則在虛無假設 $H_0: \mu = \mu_0$ 為真時，標準化的樣本平均數具有底下實際分配[自由度為 $n-1$ 的 t 分配]

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

  - 此時唯一具有虛無分配的檢定統計量為標準化的樣本平均數 $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，計算 P 值時亦須使用該檢定統計量以及 t 分配。

- **t 檢定統計量**：

$$t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S_{\bar{X}}}\sim t_{n-1}$$

式中，μ_0 為虛無假設中的母體參數假設值，$S_{\bar{X}}=S/\sqrt{n}$ 為樣本平均數的標準差，通常稱為**標準誤**(standard error)。

➢ 若 t_{n-1} 為自由度為 $n-1$ 的 t 分配，而 $t_{n-1,\alpha}$ 滿足 $P(t_{n-1}>t_{n-1,\alpha})=\alpha$，$t_{n-1,\alpha/2}$ 滿足 $P(t_{n-1}>t_{n-1,\alpha/2})=\alpha/2$，則各式檢定的決策法則如下：

檢定	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 對立假設	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$
接受域 拒絕域	$-t_{n-1,\alpha/2}\le t\le t_{n-1,\alpha/2}$ $t<-t_{n-1,\alpha/2}$ 或 $t>t_{n-1,\alpha/2}$	$t\ge -t_{n-1,\alpha}$ $t<-t_{n-1,\alpha}$	$t\le t_{n-1,\alpha}$ $t>t_{n-1,\alpha}$

- 例子(12.8)：衛生署的國民醫療保健支出統計指出，『台灣地區每年每人醫療保健支出平均為 3.4 萬元』。某研究人員懷疑此一結果，隨機抽取 16 人，得知平均醫療支出為 3.2 萬元，樣本標準差為 3.6 萬元，請在常態分配的假設下，以 $\alpha=0.05$ 進行檢定

➢ 由題意知：$n=16$、$\bar{X}=3.2$、$S=3.6$

➢ 虛無假設與對立假設設定為

$$H_0:\mu=3.4$$

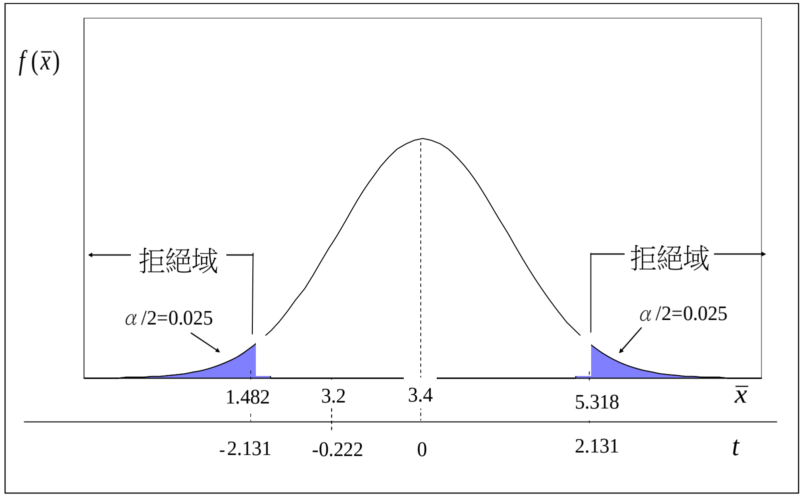
$$H_1:\mu\neq 3.4$$

➢ t 檢定統計量：$t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t_{n-1}$，在 $\alpha=0.05$ 的顯著水準下，自由度 15，雙尾檢定的臨界值為 $t_{n-1,\alpha/2}=t_{15,0.025}=2.131$，故

接受域：$-2.131\le t\le 2.131$

拒絕域：$t<-2.131$ 或 $t>2.131$

根據樣本所算出之 t 統計量為 $t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{3.2-3.4}{3.6/\sqrt{16}}=\frac{-0.2}{0.9}=-0.222$，落在接受域內，故無法拒絕虛無假設，亦即『在 5%的顯著水準下，無法拒絕每年每人醫療保健支出平均為 3.4 萬元』



➢ 以樣本平均數 $\bar{X}$ 做檢定：當然，我們可以利用 $t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 的關係將拒絕域與接受域改寫為

接受域：$-2.131\le t\le 2.131 \Rightarrow -2.131\le \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\le 2.131$

$$\Rightarrow \mu_0-2.131\cdot S/\sqrt{n}\le \bar{X}\le \mu_0+2.131\cdot S/\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow 3.4-2.131\cdot 3.6/\sqrt{16}\le \bar{X}\le 3.4-2.131\cdot 3.6/\sqrt{16}$$

$$\Rightarrow 1.482\le \bar{X}\le 5.318$$

拒絕域：$\bar{X}\le 1.482$ 或 $\bar{X}>5.318$

進而利用樣本平均數進行假設檢定。但除非題目有這樣的要求，否則事實上是多此一舉。

附註：統計學通常要求檢定統計量為<u>**樞紐統計量**</u>(pivotal statistic：檢定統計量的虛無分配與母體參數無關)。很明顯地，$\bar{X}$ 並非樞紐統計量，Z 與 t 才是樞紐統計量。

- EXCEL 中計算 t 統計量的 P 值：指令為 TDIST，本例中的樣本 t 統計量為 $t=-0.222$，所以檢定的 P 值等於是『自由度為 15 的 t 分配比-0.222 小的機率之 2 倍』，亦即

$$P\text{值}=2\times P(t_{15}<-0.222)=2\times P(t_{15}>0.222)$$

在 X 位置輸入 0.222 [X 僅接受正值的輸入]，Deg_freedom 輸入 5，Tails 輸入 2，即可得出本例的 P值 $=0.8273$；P 值大於顯著水準 $\alpha=0.05$，故無法拒絕虛無假設。

母體比例的假設檢定

- 樣本比例的抽樣分配：若母體中具有某一性質的比例為 p，從母體中抽出一組隨機樣本，計算樣本比例 $\hat{p}$，則在樣本數夠大時 ($np>5$ 及 $nq>5$)，標準化的 $\hat{p}$ 近似標準常態分配[$q=1-p$]

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{pq/n}}\approx N(0,1)$$

- 檢定統計量：若所欲檢定的虛無假設為 $H_0: p=p_0$，則可利用底下的 Z 統計量

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p_0q_0/n}}=\frac{\hat{p}-p_0}{\sigma_{\hat{p}}}\approx N(0,1)$$

式中，p_0 為虛無假設中的母體參數假設值，$\hat{p}$ 為樣本比例，$\sigma_{\hat{p}}=\sqrt{p_0q_0/n}$ 為樣本比例的標準差(標準誤)[若虛無假設 $p=p_0$ 成立，則樣本比例的標準差就是 $\sqrt{p_0q_0/n}$]。

- 根據 Z 統計量所具有的常態分配性質，可將三種檢定的決策法則界定為

檢定	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 對立假設	$H_0: p=p_0$ $H_1: p\neq p_0$	$H_0: p=p_0$ $H_1: p<p_0$	$H_0: p=p_0$ $H_1: p>p_0$
接受域 拒絕域	$-Z_{\alpha/2}\le Z\le Z_{\alpha/2}$ $Z<-Z_{\alpha/2}$ 或 $Z>Z_{\alpha/2}$	$Z\ge -Z_{\alpha}$ $Z<-Z_{\alpha}$	$Z\le Z_{\alpha}$ $Z>Z_{\alpha}$

- 例子(12.11)：某電視公司的市場調查部門指出，『顧客對 A、B 兩節目有相同的喜好』。隨機抽取 225 人的樣本，得知喜歡 A 節目的有 130 人，約 58%。請問市場調查報告是否可靠($\alpha=0.01$)
  - 令 p 表示喜愛 A 節目的比例，由題意知 $n=225$、$\hat{p}=0.58$
  - 虛無假設與對立假設

$H_0: p=0.5$ [市場調查報告可靠]

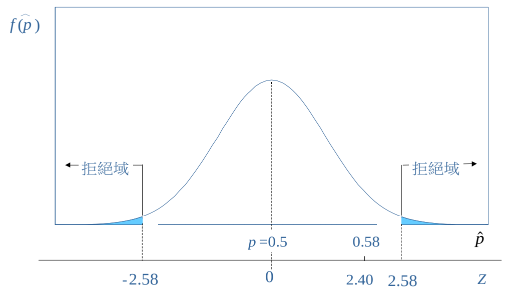
$H_1: p\neq 0.5$ [市場調查報告不可靠]

- Z 檢定統計量：$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p_0q_0/n}}\approx N(0,1)$，在 1%的顯著水準下，雙尾檢定的臨界值為 2.575，因此將接受域與拒絕域設為

接受域：$-2.575\le Z\le 2.575$

拒絕域：$Z<-2.575$ 或 $Z>2.575$

- 根據樣本所算出的 Z 統計量 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p_0q_0/n}}=\frac{0.58-0.5}{\sqrt{0.5\cdot 0.5/225}}=2.40$，位於接受域內，故無法拒絕虛無假設，亦即『在 1%的顯著水準下，我們無法拒絕市場調查報告可靠的說法』



母體變異數的假設檢定

- 樣本變異數的抽樣分配：從平均數為 μ 、變異數為 σ^2 的常態母體中抽出一組個數 n 的隨機樣本 $X_1,\ldots,X_n$，計算樣本變異數 S^2，則

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

- 檢定統計量：若所欲檢定的虛無假設為 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ ，則可利用底下的 χ^2 檢定統計量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

式中：σ_0^2 為虛無假設中的母體參數假設值，S^2 為樣本變異數；該檢定統計量服從自由度為 $n-1$ 的卡方分配。

- 決策法則：若 $\chi^2_{n-1,1-\alpha}$ 、 $\chi^2_{n-1,\alpha}$ 、 $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ 、 $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ 分別滿足

左尾： $P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_{n-1,1-\alpha}) = 1-\alpha$ 或 $P(\chi^2_{n-1} < \chi^2_{n-1,1-\alpha}) = \alpha$

右尾： $P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_{n-1,\alpha}) = \alpha$

雙尾(右)： $P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_{n-1,\alpha/2}) = \alpha/2$

雙尾(左)： $P(\chi^2_{n-1} < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}) = \alpha/2$

則可將三種檢定的決策法則定義為

檢定	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 對立假設	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$
接受域 拒絕域	$\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \le \chi^2 \le \chi^2_{n-1,\alpha/2}$ $\chi^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ 或 $\chi^2 > \chi^2_{n-1,\alpha/2}$	$\chi^2 \ge \chi^2_{n-1,1-\alpha}$ $\chi^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$	$\chi^2 \le \chi^2_{n-1,\alpha}$ $\chi^2 > \chi^2_{n-1,\alpha}$

- 例子(12.13)：大禹工廠生產 ball bearing，聲稱其編號 3401 的 ball bearing 直徑之標準差不超過 0.007 公分。現抽取 91 個成品，得其樣本標準差為 0.0083，請問大禹工廠之宣稱是否可以採信(顯著水準 $\alpha=0.01$)？
  - 由題意知 $n=91$ 、 $S=0.0083$
  - 虛無假設與對立假設

    $H_0:\sigma=0.007$ [3401 直徑標準差不超過 0.007 公分]

    $H_1:\sigma>0.007$ [3401 直徑標準差超過 0.007 公分]

    這組假設等同於[變異數的檢定]

    $H_0:\sigma^2=0.007^2$ [3401 直徑標準差不超過 0.007 公分]

    $H_1:\sigma^2>0.007^2$ [3401 直徑標準差超過 0.007 公分]
  - χ^2 檢定統計量： $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$ 。

- 由於顯著水準 $\alpha=0.01$，自由度 $n-1=91-1=90$，可知右尾檢定的臨界值為 124.116。
- 根據樣本所計算出的 χ^2 統計量為

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{(91-1)0.0083^2}{0.007^2}=126.37$$

由於樣本 χ^2 統計量比臨界值大，落在拒絕域內，因此拒絕虛無假設，亦即『大禹工廠 3401 之直徑標準差超過 0.007 公分』，或是說『大禹工廠之宣稱不可採信』。