第 13 章　兩母體的統計估計與假設檢定

- 第 11 與 12 章討論的是單一母體參數的估計與假設檢定。本章將前兩章的內容推廣到兩母體之參數的估計與假設檢定。
- 獨立母體與不獨立母體：設 X 與 Y 分別代表兩個母體的特質，若 X 與 Y 為統計獨立，則 X 與 Y 為兩獨立母體，否則為不獨立。
  - **兩獨立母體**(independent population)：例子(1) X 為農家所得，Y 為非農家所得，我們想了解農家所得與非農家所得的差異；(2) X 為 A 廠牌輪胎的壽命，Y 為 B 廠牌輪胎的壽命，我們想了解兩廠牌輪胎壽命的差異。
  - **成對母體**(paired population)[不獨立母體]：例子(1) X 為 A 班學生期中考成績，Y 為 A 班學生期末考成績，我們想了解期中考成績與期末考成績的差異；(2) X 為減肥計畫參與者減肥前體重，Y 為減肥計畫參與者減肥後體重，我們想了解參與減肥計畫前後體重的差異。

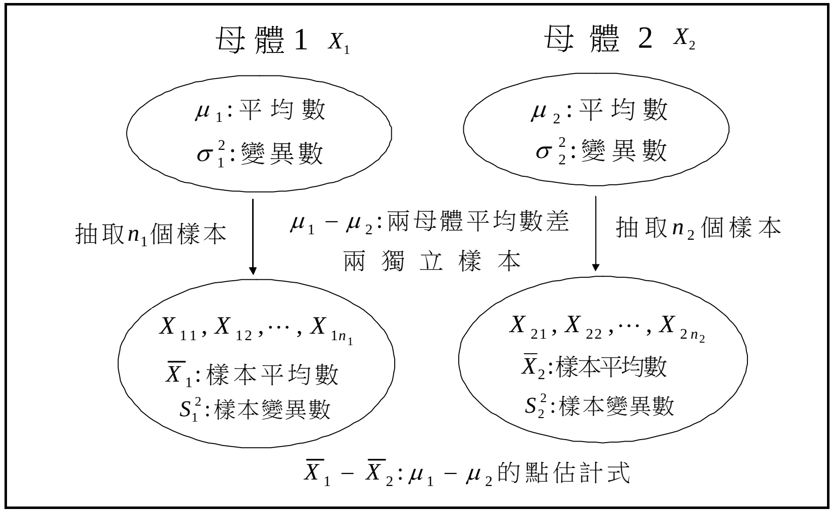
- **獨立樣本**(independent sample)：分別自兩個獨立母體，隨機獨立抽樣所得的兩個樣本稱為獨立樣本。
- **成對樣本(**paired samples**)**：自母體中抽取元素，對同一元素蒐集實驗前後兩個觀察值所構成的樣本稱為成對樣本。

兩獨立母體平均數差的統計推論—近似分配

- 假設 X_1 與 X_2 為兩獨立母體，母體分配未知，自兩母體中抽取兩組獨立樣本。符號：

	母體 1 (X_1)	母體 2 (X_2)
母體平均數	μ_1	μ_2
母體變異數	σ_1^2	σ_2^2
樣本觀察值個數	n_1	n_2
樣本平均數	$\bar{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}$	$\bar{X}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$
樣本變異數	$S_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2$	$S_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2$

- 我們現在感興趣的問題是：兩母體平均數差異 $\mu_1-\mu_2$ 的
  - 點估計與區間估計
  - 假設檢定



- 兩母體平均數差異 $\mu_1-\mu_2$ 的**點估計式**：
  - 因為 $\bar{X}_1$ 是 μ_1 的最佳線性不偏估計式(BLUE)，$\bar{X}_2$ 是 μ_2 的最佳線性不偏估計式；再加上 X_1 與 X_2 為兩獨立母體的性質，可知兩母體平均數差異 $\mu_1-\mu_2$ 的最佳線性不偏估計式為

$$\boxed{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$$

- $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ 的**抽樣分配**：
  - 由於母體分配未知，所以只要樣本個數 n_1 與 n_2 夠大(CLT)

$$\bar{X}_1 \approx N(\mu_1, \tfrac{\sigma_1^2}{n_1})$$

$$\bar{X}_2 \approx N(\mu_2, \tfrac{\sigma_2^2}{n_2})$$

  - 由於 $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ 為 $\bar{X}_1$ 與 $\bar{X}_2$ 的線性組合，因此，只要樣本個數 n_1 與 n_2 夠大，$\bar{X}_1-\bar{X}_2$ 亦近似常態分配；其平均數與變異數分別為

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=E(\bar{X}_1-\bar{X}_2)=E(\bar{X}_1)-E(\bar{X}_2)=\mu_1-\mu_2$$

$$\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=V(\bar{X}_1-\bar{X}_2)=V(\bar{X}_1)+V(\bar{X}_2)=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

- 若未對母體分配進行假設，$\bar{X}_1-\bar{X}_2$ 的(近似)抽樣分配為

$$\boxed{\bar{X}_1-\bar{X}_2\approx N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})}$$

或是 $$\boxed{\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\approx N(0,1)}$$

- 若已知兩母體的變異數 σ_1^2、σ_2^2，則 $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$ 亦已知，故可以直接利用上述分配來進行區間估計與假設檢定。若兩母體的變異數 σ_1^2、σ_2^2 未知，則須先對 $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$ 進行估計，否則上述近似分配將無用武之地。

- $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ 的估計式：既然 S_1^2、S_2^2 是估計 σ_1^2、σ_2^2 的良好估計式，直覺上當然就是以 $\boxed{S^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$ 來估計 $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$。
- 若以 $S^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ 來估計 $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$，根據中央極限定理，

$$\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}\approx N(0,1)$$

- **$\bar{X}_1-\bar{X}_2$ 之抽樣分配的總結**：

兩母體變異數 σ_1^2、σ_2^2 已知

$$\boxed{\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\approx N(0,1)} \quad 或 \quad \boxed{\bar{X}_1-\bar{X}_2\approx N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})}$$

兩母體變異數 σ_1^2、σ_2^2 未知

$$\boxed{\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}\approx N(0,1)} \quad 或 \quad \boxed{\bar{X}_1-\bar{X}_2\approx N(\mu_1-\mu_2,\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2})}$$

兩獨立母體平均數差異 $\mu_1-\mu_2$ 的信賴區間—近似區間

- 兩母體變異數 σ_1^2、σ_2^2 已知：若給定信賴水準 $1-\alpha$ 時，根據常態分配所找出的臨界值為 $Z_{\alpha/2}$，則

$$P\left(-Z_{\alpha/2}\le\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\le Z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

式中，$\boxed{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$。將不等式加以推導可得

$$P\left(-Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\le\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)\le Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(-Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\le(\mu_1-\mu_2)-(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\le Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2)-Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\le(\mu_1-\mu_2)\le(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)=1-\alpha$$

因此，$\mu_1-\mu_2$ 的 $1-\alpha$ 信賴區間為

$$\boxed{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$$

- 兩母體變異數 σ_1^2、σ_2^2 未知：若給定信賴水準 $1-\alpha$ 時，根據常態分配所找出的臨界值為 $Z_{\alpha/2}$，則

$$P\left(-Z_{\alpha/2}\le\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\le Z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

式中，$\boxed{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$。將不等式加以推導可得

$$P\left(-Z_{\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\le\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)\le Z_{\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(-Z_{\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\le(\mu_1-\mu_2)-(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\le Z_{\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2)-Z_{\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\le(\mu_1-\mu_2)\le(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+Z_{\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)=1-\alpha$$

因此，$\mu_1-\mu_2$ 的 $1-\alpha$ 信賴區間為

$$\boxed{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm Z_{\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$$

- 例子：台北市的計程車大部分在監理站驗車，新北市的計程車大部分在民營代檢廠驗車。監理站與代檢廠驗車時間有差異嗎？隨機選取 1295 輛台北市計程車，平均驗車時間為 25 分鐘，抽取 1574 輛新北市計程車，平均驗車時間為 20 分鐘。根據以往經驗，台北市和新北市驗車時間的標準差分別為 7.7 和 8.3 分鐘。建構台北市和新北市驗車時間差異的 99%信賴區間。(變異數已知)
  - ➢ 由題意可知：$n_1 = 1295$ 、 $\bar{X}_1 = 25$ 、 $\sigma_1 = 7.7$ 、 $n_2 = 1574$ 、 $\bar{X}_2 = 20$ 、 $\sigma_2 = 8.3$ 。
  - ➢ 計算 $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ 的標準差 $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{7.7^2}{1295} + \frac{8.3^2}{1574}} = 0.315$
  - ➢ 根據常態分配所找出的 99%信賴區間臨界值為 $Z_{\alpha/2} = 2.575$
  - ➢ 因此，台北市和新北市驗車時間差異的 99%信賴區間為

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = (25-20) \pm 2.575 \cdot 0.315 = 5 \pm 0.811$$

$$= 4.189 \sim 5.811$$

- 例子：達美樂想了解新竹區分店的營業額在雨季與乾季有何差異。運用底下資料建構雨季與乾季營業額的 95%信賴區間。

季節	雨季（3 月至 5 月）	乾季（10 月至 12 月）
樣本數	92	92
平均數	1,815,233	1,789,992
標準差	85,313	106,125

  - ➢ 由題意可知：$n_1 = 92$、$\bar{X}_1 = 1815233$、$S_1 = 85313$、$n_2 = 92$、$\bar{X}_2 = 1789992$ 、 $\sigma_2 = 106125$ 。
  - ➢ 估計 $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ 的標準差 $S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ ：

$$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{85313^2}{92} + \frac{106125^2}{92}} = 14196$$

  - ➢ 根據常態分配所找出的 95%信賴區間臨界值為 $Z_{\alpha/2} = 1.96$
  - ➢ 因此，雨季與乾季營業額的 95%信賴區間為

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Z_{\alpha/2} S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = (1815233 - 1789992) \pm 1.96 \cdot 14196$$

$$= 25241 \pm 27824 = -2583 \sim 53065$$

- 兩母體的變異數相同：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ，σ^2 稱為**共同變異數**
  - ➢ 若假設母體變異數已知，$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ 的變異數可簡化為

$$\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2} = \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ 的標準差可簡化為 $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = \sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$

  - ➢ 若母體變異數未知，則 $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ 的變異數 $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$ 須加以估計，而其中唯一需要估計的就是共同變異數 σ^2 。但由於兩母體的變異數同為 σ^2 ，所以由兩個母體當中所取得的樣本都可用來作為 σ^2 的估計樣本，因為這樣做會更具有效性。
  - ➢ 共同變異數 σ^2 的估計：**混合變異數**(pooled sample variance) 樣本變異數為『離均差平方和除以樣本自由度』，自由度為『樣本個數減掉需事先估計的參數個數』。因此

$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2} = \boxed{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

式中，$S_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \bar{X}_1)^2$ 、$S_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \bar{X}_2)^2$ 分別為樣本 1 與 2 的樣本變異數。[S_p 稱為**混合標準差**]

  - ➢ $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ 的變異數 $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ 之估計式：

$$S^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \Rightarrow \boxed{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

  - ➢ 兩獨立母體平均數差異 $\mu_1 - \mu_2$ 的信賴區間(具共同變異數)

母體變異數已知：$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$

母體變異數未知：$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Z_{\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$

式中：$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$ 、 $S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$

而 $S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$

- 例子：達美樂想了解新竹區分店外送機車的平均行駛里程在雨季與乾季的差異。根據底下數據建構雨季與乾季平均行駛里程差異的 95%信賴區間。[假設雨季與乾季行駛里程的變異程度相同]

季節	雨季（3 月至 5 月）	乾季（10 月至 12 月）
樣本數（輛）	38	34
平均里程	852	445
標準差	231	162

  - 由題意可知：$n_1 = 38$、$\bar{X}_1 = 852$、$S_1 = 231$、$n_2 = 34$、$\bar{X}_2 = 445$、$S_2 = 162$。
  - 混合標準差：

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(38-1)231^2+(34-1)162^2}{38+34-2}} = 201.4$$

因此，$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ 的標準差 $S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ 為

$$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = S_p\sqrt{\tfrac{1}{n_1}+\tfrac{1}{n_2}} = 201.4\sqrt{\tfrac{1}{38}+\tfrac{1}{34}} = 47.5$$

  - 根據常態分配所找出的 95%信賴區間臨界值為 $Z_{\alpha/2} = 1.96$
  - 因此，雨季與乾季平均行駛里程差異的 95%信賴區間為

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2) \pm Z_{\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = (852-445)\pm 1.96\cdot 47.5$$
$$= 407 \pm 93.1 = 313.9 \sim 500.1$$

兩獨立母體平均數差 $\mu_1-\mu_2$ 的假設檢定

- 檢定統計量：Z 統計量**[任意母體分配，近似抽樣分配]**
  - 母體變異數 σ_1^2、σ_2^2 已知：

$$Z = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} \approx N(0,1) \quad 式中 \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

若兩母體的變異數相同 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

$$Z = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} \approx N(0,1) \quad 式中 \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

  - 母體變異數 σ_1^2、σ_2^2 未知：[以 S_1^2、S_2^2 估計 σ_1^2、σ_2^2]

$$Z = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} \approx N(0,1) \quad 式中 \quad S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

若兩母體的變異數相同 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ [以 S_p^2 估計 σ^2]

$$Z = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} \approx N(0,1) \quad 式中 \quad S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

- 雙尾、右尾、左尾檢定[Z_α、$Z_{\alpha/2}$ 為根據常態分配找出之臨界值]

檢定	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 對立假設	$H_0:\mu_1-\mu_2=D_0$ $H_1:\mu_1-\mu_2\neq D_0$	$H_0:\mu_1-\mu_2=D_0$ $H_1:\mu_1-\mu_2<D_0$	$H_0:\mu_1-\mu_2=D_0$ $H_1:\mu_1-\mu_2>D_0$
特例： $D_0=0$	$H_0:\mu_1=\mu_2$ $H_1:\mu_1\neq\mu_2$	$H_0:\mu_1=\mu_2$ $H_1:\mu_1<\mu_2$	$H_0:\mu_1=\mu_2$ $H_1:\mu_1>\mu_2$
接受域 拒絕域	$-Z_{\alpha/2}\le Z\le Z_{\alpha/2}$ $Z<-Z_{\alpha/2}$ 或 $Z>Z_{\alpha/2}$	$Z\ge -Z_\alpha$ $Z<-Z_\alpha$	$Z\le Z_\alpha$ $Z>Z_\alpha$

  - 計算樣本的 Z 統計量時，以 D_0 取代 $\mu_1-\mu_2$。

- 例子：台灣銀行宣稱她的客戶在各分行平均等待時間低於第一銀行。華通企管顧問公司從台灣銀行抽取 64 位客戶，發現平均等待時間為 9.06 分鐘，從第一銀行抽取 81 位客戶，發現平均等待時間為 10.51 分鐘；假設兩母體標準差已知為 $\sigma_1 = 2.5$、$\sigma_2 = 3.5$ 分。請在 $\alpha = 0.01$ 下，檢定台灣銀行的宣稱是否為真。
  - 令 μ_1 為台灣銀行客戶的平均等待時間，μ_2 為第一銀行客戶的平均等待時間。由題意知：$n_1 = 64$、$\bar{X}_1 = 9.06$、$\sigma_1 = 2.5$、$n_2 = 81$、$\bar{X}_2 = 10.51$、$\sigma_2 = 3.5$。
  - 兩個假設：

$H_0: \mu_1-\mu_2 = 0$ [兩銀行客戶平均等待時間沒有差異]
$H_1: \mu_1-\mu_2 < 0$ [台灣銀行客戶平均等待時間較低]

  - 檢定統計量

$$Z = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} \approx N(0,1) \quad 式中 \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

- 計算樣本 Z 檢定統計量

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{2.5^2}{64}+\frac{3.5^2}{81}}=0.4989$$

$$Z=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_1)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}=\frac{(9.06-10.51)-0}{0.4989}=-2.91$$

- 結論：顯著水準 $\alpha=0.01$ 下左尾檢定的臨界值為 -2.33。由於樣本 Z 統計量小於臨界值，位於拒絕域內，故拒絕虛無假設，接受對立假設。亦即，『在 1%的顯著水準下，台灣銀行客戶平均等待時間顯著低於第一銀行客戶平均等待時間』。

● 例子：台大想瞭解碩士生與大學生平均薪資的差異，以問卷進行調查，所得到的數據如下[母體 1 表碩士生、母體 2 表大學生]

$n_1=470$、$\bar{X}_1=43361.702$、$S_1=13622.892$

$n_2=253$、$\bar{X}_2=32470.356$、$S_2=17893.094$

請在 $\alpha=0.05$ 下檢定碩士生的薪水是否比大學生多 5000 元以上。

- 兩個假設

$H_0:\mu_1-\mu_2=5000$ [碩士生與大學生薪水差異不高於 5000 元]

$H_1:\mu_1-\mu_2>5000$ [碩士生與大學生薪水差異高於 5000 元]

- 檢定統計量：

$$Z=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\approx N(0,1) \quad \text{式中} \quad S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

- 計算樣本 Z 檢定統計量

$$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{13622.892^2}{470}+\frac{17893.094^2}{253}}=1288.535$$

$$Z=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}=\frac{(43361.702-32470.356)-5000}{1288.535}=4.572$$

- 結論：顯著水準 $\alpha=0.05$ 下右尾檢定的臨界值為 1.645。由於樣本 Z 統計量(4.572)大於臨界值，位於拒絕域內，故拒絕虛無假設，接受對立假設。亦即，『在 5%的顯著水準下，碩士生的薪水顯著比大學生多 5000 元以上』。

兩獨立常態母體平均數差的統計推論—實際分配

● $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ **的抽樣分配**：

- 兩母體變異數已知：由於兩母體均具常態分配，因此

$$\bar{X}_1\sim N(\mu_1,\tfrac{\sigma_1^2}{n_1}) \qquad \bar{X}_2\sim N(\mu_2,\tfrac{\sigma_2^2}{n_2})$$

故 $\bar{X}_1-\bar{X}_2\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$，亦即

$$\boxed{\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\sim N(0,1)} \quad \text{式中} \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

若兩母體的變異數相同 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，可簡化 $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ 之計算

$$\boxed{\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\sim N(0,1)} \quad \text{式中} \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

- 兩母體變異數未知：若兩母體的變異數 σ_1^2、σ_2^2 未知，則須以樣本變異數 S_1^2、S_2^2 來估計，而 $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ 則以 $S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$ 估計。在此情況下，標準化的 $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ 具有底下抽樣分配：

$$\boxed{\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\approx t(\varphi)}$$

$$\text{式中} \quad S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \text{、} \varphi=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1-1}+\frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2-1}} \text{。}$$

Remark 1：回想一下單一常態母體樣本平均數的抽樣分配，『若母體變異數未知，則標準化的樣本平均數具有 t 分配』。這個分配的觀念依舊適合當前的狀況，只不過目前的 t 分配僅是近似的分配，要推導也很困難，所以只好強記了。

Remark 2：根據樣本所計算出之 φ 通常不是正整數，而在進行統計推論時，通常取 φ 的整數部份(無條件捨去)做為 t 分配的自由度；以這種方式所得到的自由度稱為『保守自由度』，因為自由度越小的 t 分配，所對應的臨界值越大，區間估計的長度亦越大，亦越不容易拒絕虛無假設。

➢ 兩母體變異數未知，但相等($\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$)：由於$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$已簡化為$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$，因此以$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$來估計$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$，其中

$$S_p=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$ 為混合標準差

標準化的樣本平均數具有$t(n_1+n_2-2)$分配

$$\boxed{\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\sim t(n_1+n_2-2)}$$

證明：由於

$$\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}}{\sqrt{\dfrac{(n_1+n_2-2)S_p^2}{\sigma^2}\Big/(n_1+n_2-2)}}$$

而$\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim N(0,1)$

$$\frac{(n_1+n_2-2)S_p^2}{\sigma^2}=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}=\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}$$
$$\sim\chi^2(n_1-1)+\chi^2(n_2-1)$$
$$\sim\chi^2(n_1+n_2-2)$$

因此，$\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$

兩獨立常態母體平均數差異$\mu_1-\mu_2$的信賴區間—實際區間

- 兩常態母體變異數σ_1^2、σ_2^2已知：我們已知$\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\sim N(0,1)$，其中$\boxed{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$。若給定信賴水準$1-\alpha$時，根據標準常態分配所找出的臨界值為$Z_{\alpha/2}$，則

$$P\left(-Z_{\alpha/2}\le\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\le Z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

將不等式加以推導可得

$$P\left(-Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\le\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)\le Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)=1-\alpha$$
$$\Rightarrow P\left(-Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\le(\mu_1-\mu_2)-(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\le Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)=1-\alpha$$
$$\Rightarrow P\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2)-Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\le(\mu_1-\mu_2)\le(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)=1-\alpha$$

因此，$\mu_1-\mu_2$的$1-\alpha$信賴區間為

$$\boxed{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$$

若兩母體的變異數相同$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，則信賴區間還是如上式所示，只不過$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$之計算可簡化為$\boxed{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$

- 兩常態母體變異數σ_1^2、σ_2^2未知：由於$\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\approx t(\varphi)$，若給定信賴水準$1-\alpha$時，根據$t(\varphi)$分配所找出的臨界值為$t_{\varphi,\alpha/2}$，則

$$P\left(-t_{\varphi,\alpha/2}\le\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\le t_{\varphi,\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

式中，$\boxed{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$、$\boxed{\varphi=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1-1}+\frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}}$。

將不等式加以推導可得

$$P\left(-t_{\varphi,\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\le\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)\le t_{\varphi,\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)=1-\alpha$$
$$\Rightarrow P\left(-t_{\varphi,\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\le(\mu_1-\mu_2)-(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\le t_{\varphi,\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)=1-\alpha$$
$$\Rightarrow P\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{\varphi,\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\le(\mu_1-\mu_2)\le(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{\varphi,\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)=1-\alpha$$

因此，$\mu_1-\mu_2$的$1-\alpha$信賴區間為

$$\boxed{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm t_{\varphi,\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$$

- 兩常態母體變異數 σ_1^2 、σ_2^2 未知，但相等($\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$)：由於 $\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$，其中 $\boxed{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$，而混合標準差 $\boxed{S_p=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}}$。若給定信賴水準 $1-\alpha$ 時，根據 $t(n_1+n_2-2)$ 分配所找出的臨界值為 $t_{(n_1+n_2-2),\alpha/2}$，則

$$P\left(-t_{(n_1+n_2-2),\alpha/2}\le\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\le t_{(n_1+n_2-2),\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

將不等式加以推導可得

$$P\left(-t_{(n_1+n_2-2),\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\le\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)\le t_{(n_1+n_2-2),\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(-t_{(n_1+n_2-2),\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\le(\mu_1-\mu_2)-(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\le t_{(n_1+n_2-2),\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{(n_1+n_2-2),\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\le(\mu_1-\mu_2)\le(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{(n_1+n_2-2),\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)=1-\alpha$$

因此，$\mu_1-\mu_2$ 的 $1-\alpha$ 信賴區間為

$$\boxed{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm t_{(n_1+n_2-2),\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$$

- 例子：某次針對男性病患與女性病患門診醫療費用的調查結果

	樣本數	樣本平均數	樣本標準差
男性病患	14	830	283
女性病患	15	748	275

假設男、女性病患的門診醫療費用服從常態分配，且母體變異數相等，請建構男、女性病患平均門診醫療費用差異的 95%信賴區間。

➢ 令 μ_1、μ_2 分別代表男、女性病患的平均門診醫療費用，$\bar{X}_1$、$\bar{X}_2$ 分別為對應的樣本平均數。由題意知：$n_1=14$、$\bar{X}_1=830$、$S_1=283$、$n_2=15$、$\bar{X}_2=748$、$S_2=275$。

➢ 混合標準差

$$S_p=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{(14-1)283^2+(15-1)275^2}{14+15-2}}=279$$

➢ 樣本平均數差 $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ 的標準差

$$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=279\sqrt{\frac{1}{14}+\frac{1}{15}}=104$$

➢ 兩獨立常態母體，母體變異數相等但未知時，標準化的樣本平均數差 $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ 具有底下抽樣分配

$$\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

因 $n_1=14$、$n_2=15$，根據 $t(n_1+n_2-2)=t(14+15-2)=t(27)$ 分配所找出的 95%信賴區間臨界值為 $t_{(n_1+n_2-2),\alpha/2}=t_{27,0.025}=2.052$，故男、女性病患平均門診醫療費用差異的 95%信賴區間為

$$\begin{aligned}(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm t_{(n_1+n_2-2),\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}&=(830-748)\pm 2.052\cdot 104\\&=82\pm 213\\&=-131\sim 295\end{aligned}$$

- 例子：朱教授想了解高、低學歷失業週數的差異，隨機抽取 41 人，其中高中職以下有 25 人，平均失業週數為 24.9 週，樣本標準差為 4.5 週，大專以上有 16 人，平均失業週數為 23.3 週，樣本標準差為 2.0 週。假設失業週數長短服從常態分配，請建構高、低學歷平均失業週數差異的 90%信賴區間。

➢ 令 μ_1、μ_2 分別代表高中職以下、大專以上的平均失業時間，$\bar{X}_1$、$\bar{X}_2$ 分別為對應的樣本平均數。由題意知：$n_1=25$、$\bar{X}_1=24.9$、$S_1=4.5$、$n_2=16$、$\bar{X}_2=23.3$、$S_2=2.0$。

➢ 樣本平均數差 $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ 的標準差

$$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{4.5^2}{25}+\frac{2.0^2}{16}}=1.03$$

➢ 兩獨立常態母體，母體變異數未知時，標準化的樣本平均數差 $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ 具有底下抽樣分配

$$\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} \approx t(\varphi)$$

其中

$$\varphi=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1-1}+\frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}=\frac{\left(\frac{4.5^2}{25}+\frac{2.0^2}{16}\right)^2}{\frac{(4.5^2/25)^2}{25-1}+\frac{(2.0^2/16)^2}{16-1}}=35.68$$

保守取自由度為 35。

➢ 根據 $t(\varphi)=t(35)$ 分配所找出的 90%信賴區間臨界值為 $t_{\varphi,\alpha/2}=t_{35,0.05}=1.69$，因此，低學歷平均失業週數與高學歷平均失業週數差異的 90%信賴區間為

$$\begin{aligned}(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm t_{\varphi,\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} &= (24.9-23.3)\pm 1.69\cdot 1.03\\ &=1.6\pm 1.741\\ &=-0.141\sim 3.341\end{aligned}$$

兩獨立常態母體平均數差 $\mu_1-\mu_2$ 的假設檢定

● 檢定統計量

➢ 兩常態母體變異數 σ_1^2 、σ_2^2 已知：

$$Z=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\sim N(0,1)\text{，其中 }\boxed{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\text{ 。}$$

➢ 兩常態母體變異數已知且相同 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ ：

$$Z=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\sim N(0,1)\text{，其中 }\boxed{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\text{ 。}$$

➢ 兩常態母體變異數 σ_1^2 、σ_2^2 未知：

$$t=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\approx t(\varphi)\text{，其中 }\boxed{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$\boxed{\varphi=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1-1}+\frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}}$$

➢ 兩常態母體變異數未知，但相等($\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$)：

$$t=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\sim t(n_1+n_2-2)\text{，其中 }\boxed{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

$$\boxed{S_p=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}}$$

● 例子：某餐廳想瞭解男性客人(母體 1)的平均消費額是否大於女性客人(母體 2)。經抽樣調查後，得到底下數據(母體標準差已知)

$n_1=16$ 、$\bar{X}_1=433$ 、$\sigma_1=150$

$n_2=25$ 、$\bar{X}_2=328$ 、$\sigma_2=100$

假設男性、女性客人的消費額均服從常態分配，請在顯著水準 $\alpha=0.025$ 下，檢定男性客人的平均消費額是否大於女性客人。

➢ 令 μ_1 、μ_2 分別代表男性、女性客人的平均消費額

➢ 虛無假設 $H_0:\mu_1-\mu_2=0$
對立假設 $H_1:\mu_1-\mu_2>0$

➢ 檢定統計量：獨立常態母體、變異數已知時

$$Z=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}\sim N(0,1)\text{，其中 }\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\text{ 。}$$

➢ 拒絕域與接受域：$\alpha=0.025$ 時右尾檢定臨界值為 1.96

接受域：$Z\le 1.96$

拒絕域：$Z>1.96$

➢ 樣本 Z 統計量

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{150^2}{16}+\frac{100^2}{25}}=42.5$$

$$Z=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}=\frac{(433-328)-0}{42.5}=2.47$$

➢ 結論：由於樣本 Z 統計量(2.47)大於臨界值(1.96)，位於拒絕域內，故拒絕虛無假設，接受對立假設；亦即，『在 $\alpha=0.025$ 的顯著水準下，男性客人的平均消費額顯著大於女性客人』。

- 例子：某企管顧問公司想瞭解甲、乙兩個訓練計畫的成效是否有差異，隨機抽取學員分別進行訓練後之受訓成績結果如下

  $n_1 = 15$、$\bar{X}_1 = 77.73$、$S_1 = 4.42$

  $n_2 = 12$、$\bar{X}_2 = 86.50$、$S_2 = 4.27$

  請在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，檢定甲、乙兩個訓練計畫的平均受訓成績是否相等。

  - 令 μ_1、μ_2 分別代表甲、乙兩個訓練計畫的平均受訓成績
  - 虛無假設 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$
    對立假設 $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$
  - 檢定統計量：獨立常態母體、變異數未知時

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} \approx t(\varphi)\text{，}S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\text{、}\varphi = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$$

- 拒絕域與接受域：t 統計量的自由度

$$\varphi = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} = \frac{\left(\frac{4.42^2}{15} + \frac{4.27^2}{12}\right)^2}{\frac{(4.42^2/15)^2}{15 - 1} + \frac{(4.27^2/12)^2}{12 - 1}} = 24.12$$

  保守取自由度為 24。顯著水準 $\alpha = 0.05$ 時，根據 t_{24} 分配所找出之雙尾檢定臨界值為 2.064，因此

  接受域：$-2.604 \le t \le 2.604$

  拒絕域：$t < -2.604$　或　$t > 2.604$

- 樣本 t 統計量：

$$S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{4.42^2}{15} + \frac{4.27^2}{12}} = 1.68$$

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{(77.73 - 86.50) - 0}{1.68} = -5.22$$

- 結論：由於樣本 t 統計量(-5.22)位於拒絕域內，故拒絕虛無假設，接受對立假設；亦即，『在 $\alpha = 0.05$ 的顯著水準下，甲、乙兩個訓練計畫的平均受訓成績顯著不同』。

- 例子：某腳踏車工廠想瞭解兩條生產線零件裝配時間是否相同。抽樣調查兩條生產線工人的組裝時間資料如下

  $n_1 = 25$、$\bar{X}_1 = 6.24$、$S_1^2 = 0.9908$

  $n_2 = 25$、$\bar{X}_2 = 5.996$、$S_2^2 = 0.9904$

  假設組裝時間服從常態分配，且兩母體的變異數相等，請在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，檢定生產線 1 的組裝時間是否比生產線 2 長？

  - 令 μ_1、μ_2 分別代表生產線 1、生產線 2 的平均組裝時間。
  - 虛無假設 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$
    對立假設 $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$
  - 檢定統計量：獨立常態母體、變異數未知但相等時

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)\text{，其中 } S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

- 拒絕域與接受域：t 統計量的自由度

  $n_1 + n_2 - 2 = 25 + 25 - 2 = 48$

  顯著水準 $\alpha = 0.05$ 時，根據 t_{48} 分配所找出之右尾檢定臨界值為 1.677，因此

  接受域：$t \le 1.677$

  拒絕域：$t > 1.677$

- 樣本 t 統計量：

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{(25 - 1)0.9908 + (25 - 1)0.9904}{25 + 25 - 2}} = 0.9953$$

$$S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 0.9953\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{25}} = 0.2815$$

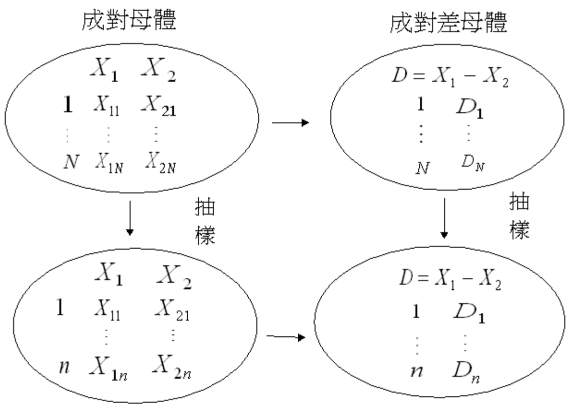
$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{(6.24 - 5.996) - 0}{0.2815} = 0.8667$$

- 結論：由於樣本 t 統計量(0.8667)位於接受域內，故無法拒絕虛無假設；亦即，『在 $\alpha = 0.05$ 的顯著水準下，兩條生產線的平均組裝時間並無顯著不同』。

成對母體平均數差的統計推論

- **成對樣本**：自母體中抽取元素，對同一元素蒐集實驗前後兩個觀察值所構成的樣本稱為成對樣本(paired samples)。
  - 例子：(1)參加減肥計畫前的體重與減肥計畫後的體重；(2)參加田徑訓練前 100 公尺的賽跑成績與參加田徑訓練後 100 公尺的賽跑成績。
  - 事實上，成對樣本的情況中僅有一個母體，從母體中隨機抽取樣本，並對這些樣本進行一項實驗，觀察樣本元素在實驗前後的性質差異。
  - 同一元素在實驗前後的兩個觀察值絕非獨立，但每一元素在實驗前後的觀察值差異可視為獨立。如：A 參加減肥計畫後的體重絕對與其參加減肥計畫前的體重有關，而 B 參加減肥計畫後的體重也絕對與其參加減肥計畫前的體重有關，但 A 前後體重的差異與 B 前後體重的差異可視為無關

  - 成對母體平均數差異的問題：我們想瞭解某一母體的平均數在進行某項實驗後是否有差異；以 μ_1 、 μ_2 分別代表實驗前後的母體平均數。現從母體中抽取 n 個元素，觀察這 n 個元素在實驗前後的數值；某個元素在實驗前後觀察值的差異(成對樣本差)可視為獨立。



- 符號：
  - X_1 、 X_2 分別代表實驗前後的母體。
  - μ_1 、 μ_2 分別代表實驗前後的母體平均數，亦即

    $\mu_1 = E(X_1)$ 、 $\mu_2 = E(X_2)$
  - 定義 $\sigma_1^2 = V(X_1)$ 、 $\sigma_2^2 = V(X_2)$ 、 $\sigma_{12} = \text{cov}(X_1, X_2)$
  - 定義母體成對差異為 $D = X_1 - X_2$ ，則

$$\mu_D = E(D) = E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = \mu_1 - \mu_2$$

$$\sigma_D^2 = V(D) = V(X_1 - X_2) = V(X_1) + V(X_2) - 2\,\text{cov}(X_1, X_2)$$

$$= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}$$

  - 從母體中隨機抽出 n 個元素，其實驗前後的觀察值分別為

    $X_{11}, X_{1n}, ..., X_{1n}$

    $X_{21}, X_{2n}, ..., X_{2n}$

  - 定義樣本成對差異如下，則 $E(D_i) = \mu_D$ 、 $V(D_i) = \sigma_D^2$

$$D_1 = X_{11} - X_{21}$$

$$D_2 = X_{12} - X_{22}$$

$$\vdots$$

$$D_n = X_{1n} - X_{2n}$$

  - 估計實驗前後的母體平均數差異 $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ ：直覺上當然是以 $\bar{X}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{1i}$ 估計 μ_1 ，以 $\bar{X}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{2i}$ 估計 μ_2 ，然後以 $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ 估計 $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ 。但這其實等於用 $\bar{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i$ 來估計 $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ ，因為

$$\bar{D} = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i} - X_{2i}) = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{1i} - \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{2i}$$

$$= \bar{X}_1 - \bar{X}_2$$

    所以母體平均數差異 $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ 的**估計式**： $\bar{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i$

➢ $\bar{D}$ 的平均數與變異數

$$\mu_{\bar{D}} = E(\bar{D}) = E(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i) = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(D_i) = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_D = \mu_D$$

$$\sigma_{\bar{D}}^2 = V(\bar{D}) = V(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i) = \tfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(D_i) = \tfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_D^2 = \tfrac{1}{n}\sigma_D^2$$

➢ 估計 $\sigma_{\bar{D}}^2$：由於 $\sigma_{\bar{D}}^2 = \frac{1}{n}\sigma_D^2$，所以僅需估計 σ_D^2，又由於 $\sigma_D^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}$，只要以底下三個樣本變異數與共變異數分別估計 σ_1^2、σ_2^2、σ_{12}，並以 $\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 - 2\hat{\sigma}_{12}$ 估計 σ_D^2 即可

$$\hat{\sigma}_1^2 = \tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i} - \bar{X}_1)^2$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = \tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i} - \bar{X}_2)^2$$

$$\hat{\sigma}_{12} = \tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i} - \bar{X}_1)(X_{2i} - \bar{X}_2)$$

而這種估計等於用 $S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2$ 來估計 σ_D^2，因為

$$S_D^2 = \tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2 = \tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[(X_{1i} - X_{2i}) - (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)]^2$$

$$= \tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[(X_{1i} - \bar{X}_1) - (X_{2i} - \bar{X}_2)]^2$$

$$= \tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i} - \bar{X}_2)^2$$

$$- \tfrac{2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i} - \bar{X}_1)(X_{2i} - \bar{X}_2)]$$

$$= \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 - 2\hat{\sigma}_{12}$$

$\sigma_{\bar{D}}^2$ 的估計式：$S_{\bar{D}}^2 = \frac{1}{n}S_D^2$，其中

$$S_D^2 = \tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2 = \tfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} D_i^2 - n\bar{D}^2\right)$$

● 成對樣本平均數差 $\bar{D}$ 的抽樣分配：(式中 $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$)

➢ 非常態母體、母體成對差變異數 σ_D^2 已知：[近似分配]

$$\tfrac{\bar{D} - \mu_D}{\sigma_D / \sqrt{n}} \approx N(0,1)$$

➢ 非常態母體、母體成對差變異數 σ_D^2 未知：[近似分配]

$$\tfrac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} \approx N(0,1)$$

➢ 常態母體、母體成對差變異數 σ_D^2 已知：[實際分配]

$$\tfrac{\bar{D} - \mu_D}{\sigma_D / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

➢ 常態母體、母體成對差變異數 σ_D^2 未知：[實際分配]

$$\tfrac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

成對母體平均數差 $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ 的信賴區間

➢ 非常態母體、母體成對差變異數 σ_D^2 已知：[近似區間]

$\bar{D} \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{D}}$，式中 $\sigma_{\bar{D}} = \sigma_D / \sqrt{n}$

➢ 非常態母體、母體成對差變異數 σ_D^2 未知：[近似區間]

$\bar{D} \pm Z_{\alpha/2}S_{\bar{D}}$，式中 $S_{\bar{D}} = S_D / \sqrt{n}$

$$S_D = \sqrt{\tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2}$$

➢ 常態母體、母體成對差變異數 σ_D^2 已知：[實際區間]

$\bar{D} \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{D}}$，式中 $\sigma_{\bar{D}} = \sigma_D / \sqrt{n}$

➢ 常態母體、母體成對差變異數 σ_D^2 未知：[實際區間]

$\bar{D} \pm t_{n-1,\alpha/2}S_{\bar{D}}$，式中 $S_{\bar{D}} = S_D / \sqrt{n}$

$$S_D = \sqrt{\tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2}$$

● 例子：某國中為了參加運動會 100 公尺賽跑，挑選出五名選手加以訓練，訓練前後的成績差異如下

$n = 5$、$\bar{D} = 3$、$S_D = 1$

假設成績的分配服從常態，請建構訓練前後的成績差異的 95% 信賴區間。

➢ 根據 $t_{n-1} = t_{5-1} = t_4$ 分配找出之 95%信賴區間臨界值為 2.776

➢ $S_{\bar{D}} = S_D / \sqrt{n} = 1/\sqrt{5} = 0.447$

➢ 訓練前後的成績差異的 95%信賴區間為

$$\bar{D} \pm t_{n-1,\alpha/2}S_{\bar{D}} = 3 \pm 2.776 \cdot 0.447 = 3 \pm 1.241$$

$$= 1.759 \sim 4.241$$

成對母體平均數差 $\mu_D=\mu_1-\mu_2$ 的假設檢定

- 虛無假設與對立假設

檢定	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 對立假設	$H_0:\mu_1-\mu_2=D_0$ $H_1:\mu_1-\mu_2\neq D_0$	$H_0:\mu_1-\mu_2=D_0$ $H_1:\mu_1-\mu_2<D_0$	$H_0:\mu_1-\mu_2=D_0$ $H_1:\mu_1-\mu_2>D_0$

亦可寫為

虛無假設 對立假設	$H_0:\mu_D=D_0$ $H_1:\mu_D\neq D_0$	$H_0:\mu_D=D_0$ $H_1:\mu_D<D_0$	$H_0:\mu_D=D_0$ $H_1:\mu_D>D_0$

- 檢定統計量[計算樣本統計量時以 D_0 取代 μ_D]
  - 非常態母體、母體成對差變異數 σ_D^2 已知：

    $$Z=\frac{\bar{D}-\mu_D}{\sigma_D/\sqrt{n}}\approx N(0,1)$$

  - 非常態母體、母體成對差變異數 σ_D^2 未知：

    $$Z=\frac{\bar{D}-\mu_D}{S_D/\sqrt{n}}\approx N(0,1)$$

  - 常態母體、母體成對差變異數 σ_D^2 已知：

    $$Z=\frac{\bar{D}-\mu_D}{\sigma_D/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

  - 常態母體、母體成對差變異數 σ_D^2 未知：

    $$t=\frac{\bar{D}-\mu_D}{S_D/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

- 例子：田徑訓練前後的成績有差異嗎？根據上例的資料

  $n=5$、$\bar{D}=3$、$S_D=1$

  在 $\alpha=0.05$ 下檢定訓練前後的成績是否具顯著差異。
  - 虛無假設與對立假設

    $H_0:\mu_D=0$

    $H_1:\mu_D\neq 0$
  - 檢定統計量

    $$t=\frac{\bar{D}-\mu_D}{S_D/\sqrt{n}}\sim t_{n-1}$$

  - 拒絕域與接受域：t 統計量的自由度為 $n-1=5-1=4$，在顯著水準 $\alpha=0.05$ 下，根據 t_4 分配所找出之雙尾檢定臨界值為 2.776，因此拒絕域與接受域為

    接受域：$-2.776\le t\le 2.776$

    拒絕域：$t<-2.776$ 或 $t>2.776$
  - 樣本 t 統計量

    $$t=\frac{\bar{D}-\mu_D}{S_D/\sqrt{n}}=\frac{3-0}{1/\sqrt{5}}=6.71$$

  - 結論：樣本 t 統計量(6.71)位於拒絕域內，故拒絕虛無假設，亦即，『在 5%的顯著水準下，田徑訓練前後的成績具有顯著差異(顯著不相等)』。
  - 以信賴區間進行假設檢定：上例中所建構 μ_D 之 95%信賴區間為 $1.759\sim4.241$，虛無假設的母體平均數差異假設值 0 不落於該信賴區間內，故拒絕虛無假設。

兩獨立母體比例差異的統計推論——近似常態分配

- 符號：
  - p_1、p_2 分別代表母體 1、母體 2 的母體比例。
  - 從母體 1 中隨機抽取 n_1 個樣本，從母體 2 中隨機抽取 n_2 個樣本；計算所得之樣本比例分別為 $\hat{p}_1$、$\hat{p}_2$。
  - 我們有興趣的是：母體比例差異 p_1-p_2
  - 欲估計 p_1-p_2，當然是以 $\hat{p}_1-\hat{p}_2$。
- **兩獨立母體樣本比例差異 $\hat{p}_1-\hat{p}_2$ 的(近似)抽樣分配**
  - 我們僅考慮樣本數足夠大的情況：$n_1p_1>5$、$n_1q_1>5$、$n_2p_2>5$、$n_2q_2>5$。[$q_1=1-p_1$、$q_2=1-p_2$]
  - 由於：當樣本數 n_1、n_2 足夠大時

    $$\hat{p}_1\approx N(p_1,\frac{p_1q_1}{n_1})$$

    $$\hat{p}_2\approx N(p_2,\frac{p_2q_2}{n_2})$$

因此，$\boxed{\hat{p}_1-\hat{p}_2 \approx N(p_1-p_2, \frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2})}$

因為 $\hat{p}_1$ 、 $\hat{p}_2$ 均為常態，故 $\hat{p}_1-\hat{p}_2$ 亦為常態，而

$$\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=E(\hat{p}_1-\hat{p}_2)=E(\hat{p}_1)-E(\hat{p}_2)=p_1-p_2$$

$$\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=V(\hat{p}_1-\hat{p}_2)=V(\hat{p}_1)+V(\hat{p}_2)=\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}$$

- 估計 $\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ ：以 $\hat{p}_1$ 、 $\hat{p}_2$ 估計 p_1 、 p_2 ，$\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ 即以 $S^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ 估計

  $S^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}$ ，式中 $\hat{q}_1=1-\hat{p}_1$ 、 $\hat{q}_2=1-\hat{p}_2$
- 標準化統計量：

$$\boxed{\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2-(p_1-p_2)}{S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}} \approx N(0,1)}$$

式中 $S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$

兩獨立母體比例差異 p_1-p_2 的區間估計

- 若給定信賴水準 $1-\alpha$ 時，根據標準常態分配所找出的臨界值為 $Z_{\alpha/2}$ ，則 p_1-p_2 的 $1-\alpha$ 信賴區間為

  $(\hat{p}_1-\hat{p}_2)\pm Z_{\alpha/2}S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ ，式中 $S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$
- 保守估計：
  - 不用 $\hat{p}_1$ 、 $\hat{p}_2$ 估計 p_1 、 p_2 ，而是直接以 $\frac{1}{2}$ 替代 p_1 、 p_2 ；這會使得 $S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ 達到其極大值，建構出最大的信賴區間。
  - 保守估計之 p_1-p_2 的 $1-\alpha$ 信賴區間為：

    $(\hat{p}_1-\hat{p}_2)\pm Z_{\alpha/2}S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ ，式中 $S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{n_1}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{n_2}}$
- 例子：太平洋崇光百貨想調查男性與女性對進口服飾偏好比例的差異。隨機抽取 360 個女性，偏好進口服飾的有 135 個，隨機抽取 364 個男性，偏好進口服飾的有 91 個。請建構女性與男性對進口服飾偏好比例差異的 90%信賴區間。

- 令 p_1 為女性對進口服飾的偏好比例， p_2 為男性對進口服飾的偏好比例。 $\hat{p}_1$ 、 $\hat{p}_2$ 為對應的樣本比例。由題意知：

  $n_1=360$ 、 $\hat{p}_1=\frac{135}{360}=0.375$ 、 $\hat{q}_1=1-\hat{p}_1=0.625$

  $n_2=364$ 、 $\hat{p}_2=\frac{91}{364}=0.25$ 、 $\hat{q}_2=1-\hat{p}_2=0.75$
- 估計 $\hat{p}_1-\hat{p}_2$ 的標準差：

  $S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}=\sqrt{\frac{0.375\cdot 0.625}{360}+\frac{0.25\cdot 0.65}{364}}=0.034$
- 根據標準常態找出的 90%信賴區間臨界值為 $Z_{\alpha/2}=1.645$ ，故女性與男性對進口服飾偏好比例差異的 90%信賴區間為

$$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)\pm Z_{\alpha/2}S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=(0.375-0.25)\pm 1.645\cdot 0.034$$
$$=0.125\pm 0.056=0.069\sim 0.181$$

- 保守估計： $S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{n_1}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{n_2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{360}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{364}}=0.0372$

$$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)\pm Z_{\alpha/2}S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=(0.375-0.25)\pm 1.645\cdot 0.0372$$
$$=0.125\pm 0.061=0.064\sim 0.186$$

兩獨立母體比例差異 p_1-p_2 的假設檢定

檢定	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設	$H_0: p_1-p_2=p_0$	$H_0: p_1-p_2=p_0$	$H_0: p_1-p_2=p_0$
對立假設	$H_1: p_1-p_2\neq p_0$	$H_1: p_1-p_2<p_0$	$H_1: p_1-p_2>p_0$

- Z 檢定統計量：

$$\boxed{Z=\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2-(p_1-p_2)}{S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}\approx N(0,1)} \text{，式中} \boxed{S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}}$$

- 若虛無假設為 $H_1: p_1-p_2=0$ ，則在虛無假設正確時， $p_1=p_2$ ，在估計 $\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ 時，若以混合樣本比例來估計 p_1 、 p_2 會相對較精準

  混合樣本比例： $\bar{p}=\frac{n_1\hat{p}_1+n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}$ 、 $\bar{q}=1-\bar{p}$

  此時， $\hat{p}_1-\hat{p}_2$ 的標準差估計式為： $\boxed{S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\sqrt{\bar{p}\,\bar{q}(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$

- 例子：某印刷行有 2 位打字小姐，打字速度差不多。最近有客戶反應打字出了很多錯字，老闆抽查了 2 位打字小姐的打字成品 500 字，發現錯字字數如下表所示

打字員	錯字數目	抽樣數
張小姐	12	500
李小姐	16	500

請在 5%的顯著水準下，檢定 2 位打字小姐的錯字率是否相等。

- 令 p_1 為張小姐的錯字率，p_2 為李小姐的錯字率。由題意知

$$n_1 = 500 \text{ 、 } \hat{p}_1 = \tfrac{12}{500} = 0.024$$
$$n_2 = 500 \text{ 、 } \hat{p}_2 = \tfrac{16}{500} = 0.032$$

- 虛無假設與對立假設

$$H_0 : p_1 - p_2 = 0$$
$$H_1 : p_1 - p_2 \neq 0$$

- 拒絕域與接受域：在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，根據標準常態分配找出之雙尾檢定臨界值為 1.96，因此拒絕域與接受域為

接受域：$-1.96 \le Z \le 1.96$

拒絕域：$Z < -1.96$ 或 $Z > 1.96$

- 樣本 Z 統計量：

混合樣本比例：(因虛無假設為 $p_1 = p_2$)

$$\bar{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{500\cdot 0.024 + 500\cdot 0.032}{500+500} = 0.028$$

$$\bar{q} = 1 - \bar{p} = 1 - 0.028 = 0.972$$

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ 的標準差估計值：

$$S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\overline{pq}\left(\tfrac{1}{n_1}+\tfrac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{0.028\cdot 0.972\left(\tfrac{1}{500}+\tfrac{1}{500}\right)} = 0.01044$$

$$\text{因此 } Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}} = \frac{(0.024-0.032)-0}{0.01044} = -0.766$$

- 結論：樣本 Z 統計量(-0.766)大於臨界值 -1.96，故無法拒絕虛無假設；亦即，『在 5%的顯著水準下，2 位打字小姐的錯字率無顯著差異』。

兩獨立母體變異數比的統計推論

- **F 分配**：若 $X_1 \sim \chi^2(v_1)$ 、 $X_2 \sim \chi^2(v_2)$，且 X_1 與 X_2 獨立，定義

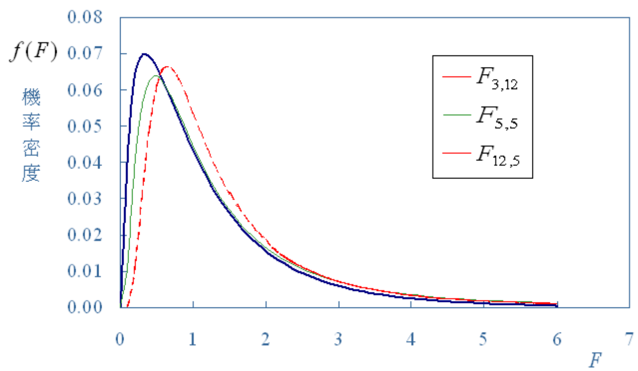
$$Y = \frac{X_1 / v_1}{X_2 / v_2}$$

則 Y 之分配為『自由度為 v_1 與 v_2 的 F 分配』，記為 $F(v_1,v_2)$ 或 F_{v_1,v_2}；v_1 稱為分子自由度，v_2 稱為分母自由度。

- F 分配之機率密度函數如下圖所示：F 分配為一右偏分配；F 分配取決於兩個自由度 v_1 、v_2，不同的 v_1 、v_2 有不同的 F 分配。。
- F 分配的平均數與變異數

$$E(F) = \tfrac{v_2}{v_2-2} \qquad (v_2 > 2)$$

$$V(F) = \tfrac{2v_2^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-2)^2(v_2-4)} \qquad (v_2 > 4)$$



- $t_v^2 = F_{1,v}$：自由度 v 的 t 分配之平方，恰為自由度 1 與 v 的 F 分配。

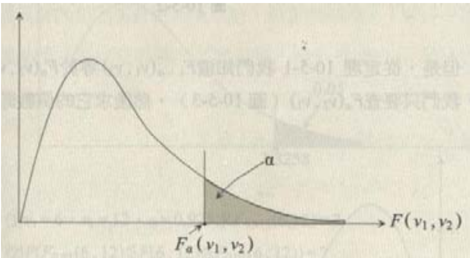
$\boxed{\text{說明}}$：令 $Z \sim N(0,1)$ ，$X \sim \chi^2(v)$，則 $t_v = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{v}}}$ ，因此

$$t_v^2 = \left(\frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{v}}}\right)^2 = \frac{Z^2}{X/v} = \frac{\chi^2(1)/1}{\chi^2(v)/v} \sim F_{1,v}$$

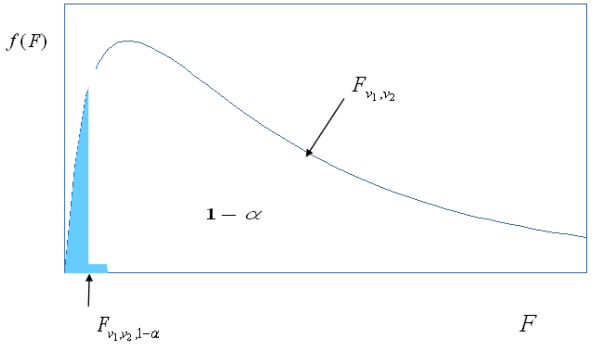
- F 分配的倒數性質：$F(v_1,v_2)$ 分配的倒數為 $F(v_2,v_1)$ 分配

$$\frac{1}{F(v_1,v_2)}=\frac{1}{(X_1/v_1)/(X_2/v_2)}=\frac{(X_2/v_2)}{(X_1/v_1)}\sim F(v_2,v_1)$$

- F 分配的臨界值：
  - 課本附表七(pp.787~796)列出了各種自由度 v_1、v_2 及機率值 α 下的右尾臨界值。例如：對應到 $\alpha=0.05$、分子自由度 $v_1=9$、分母自由度 $v_2=20$ 的數字 2.39，代表 $F_{9,20}$ 分配比 2.39 大的機率有 $\alpha=0.05$，亦即 $P(F_{9,20}>2.39)=0.05$。



- 若我們要尋找左尾臨界值，亦即 $P(F_{v_1,v_2}<F_{v_1,v_2,1-\alpha})=\alpha$ 中的 $F_{v_1,v_2,1-\alpha}$，並無附表可以直接查；但此時可以利用 F 分配的倒數性質，透過間接的方式查出左尾臨界值。



- 由於 $P(F_{v_1,v_2}<F_{v_1,v_2,1-\alpha})=\alpha$ 隱含 $P\left(\frac{1}{F_{v_1,v_2}}>\frac{1}{F_{v_1,v_2,1-\alpha}}\right)=\alpha$，而

$\frac{1}{F_{v_1,v_2}}=F_{v_2,v_1}$，亦即 $P\left(F_{v_2,v_1}>\frac{1}{F_{v_1,v_2,1-\alpha}}\right)=\alpha$；這表示 $\frac{1}{F_{v_1,v_2,1-\alpha}}$ 等於是 F_{v_2,v_1} 的右尾 α 臨界值，該臨界值可經由查表得出。若我們以 $F_{v_2,v_1,\alpha}$ 來代表 F_{v_2,v_1} 分配的右尾 α 臨界值，亦即 $P(F_{v_2,v_1}>F_{v_2,v_1,\alpha})=\alpha$，則上述說明隱含 $F_{v_2,v_1,\alpha}=\frac{1}{F_{v_1,v_2,1-\alpha}}$，亦即 $\boxed{F_{v_1,v_2,1-\alpha}=\frac{1}{F_{v_2,v_1,\alpha}}}$。

- 例子：想要找 $F_{9,15}$ 分配在 $\alpha=0.01$ 顯著水準下的左尾臨界值，亦即 $P(F_{9,15}<F_{9,15,,1-0.01})=\alpha$ 中的 $F_{9,15,,1-0.01}$。可利用

$$P\left(\frac{1}{F_{9,15}}>\frac{1}{F_{9,15,,1-0.01}}\right)=0.01\Rightarrow P\left(F_{15,9}>\frac{1}{F_{9,15,,1-0.01}}\right)=0.01$$

根據 $F_{15,9}$ 分配所找出之 $\alpha=0.01$ 右尾臨界值為 4.96，因此 $\frac{1}{F_{9,15,,1-0.01}}=4.96$，亦即 $F_{9,15,,1-0.01}=\frac{1}{4.96}=0.2016$。

- $\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}$ **的抽樣分配**：我們已知

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(n_1-1)\text{、}\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n_2-1)$$

而 $$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}=\frac{\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\Big/(n_1-1)}{\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\Big/(n_2-1)}=\frac{\frac{\chi^2(n_1-1)}{(n_1-1)}}{\frac{\chi^2(n_2-1)}{(n_2-1)}}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

亦即 $\boxed{\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)}$ **或** $\boxed{\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)}$

- 當我們想比較兩母體變異數σ_1^2、σ_2^2的大小，可比較兩者之比率
  - ➢ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \Rightarrow \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$
  - ➢ $\sigma_1^2 > \sigma_2^2 \Rightarrow \sigma_1^2 / \sigma_2^2 > 1$
  - ➢ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2 \Rightarrow \sigma_1^2 / \sigma_2^2 < 1$

兩獨立母體變異數比σ_1^2 / σ_2^2的區間估計

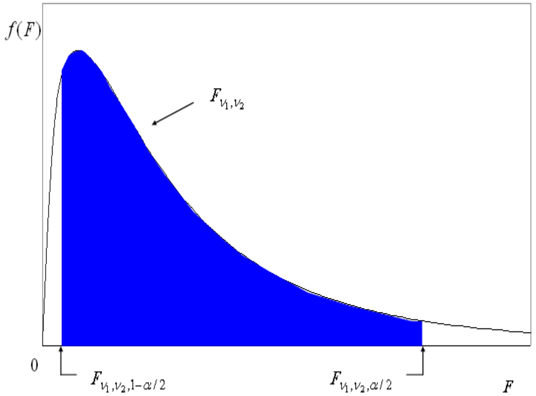
- 我們已知$\dfrac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$，若根據$F_{n_1-1,n_2-1}$分配所找出之左尾$\alpha/2$臨界值為$F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}$，右尾$\alpha/2$臨界值為$F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}$ [參見下圖]，則

$$P\left(F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2} \le \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \le F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2} \le \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\frac{S_1^2}{S_2^2} \le F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\frac{S_2^2}{S_1^2} \le \frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$



- ➢ 因此，σ_1^2 / σ_2^2的$1-\alpha$信賴區間為

$$\boxed{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}}}$$

- ➢ 由於$F_{n_2-1,n_1-1,\alpha/2} = \dfrac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}}$，因此信賴區間又可表示為

$$\boxed{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{n_2-1,n_1-1,\alpha/2}}$$

- 例子(p.499 個案研究)：問題陳述參見課本。令σ_1^2為舊制銷售獎金的變異數，σ_2^2為新制銷售獎金的變異數。樣本資料如下

  $n_1 = 13$、$S_1^2 = 153 \times 10^6$

  $n_2 = 13$、$S_2^2 = 541 \times 10^6$

  請估計舊制、新制銷售獎金變異數比的 95%信賴區間。

- ➢ 該題要建構的是σ_1^2 / σ_2^2的 95%信賴區間。
- ➢ 由於$\dfrac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$，而$n_1 = 13$、$n_2 = 13$，故

$$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F_{12,12}$$

- ➢ 令$F_{12,12,0.975}$代表$F_{12,12}$分配的左尾$\alpha/2 = 0.025$臨界值，$F_{12,12,0.025}$代表$F_{12,12}$分配的右尾$\alpha/2 = 0.025$臨界值，則

$$P\left(F_{12,12,0.975} \le \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \le F_{12,12,0.025}\right) = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{F_{12,12,0.025}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\frac{S_2^2}{S_1^2} \le \frac{1}{F_{12,12,0.975}}\right) = 0.95$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{12,12,0.025}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{12,12,0.975}}\right) = 0.95$$

- 因此，σ_1^2/σ_2^2 的 95%信賴區間為

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{12,12,0.025}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{12,12,0.975}}$$

由於 $F_{12,12,0.025}=1/F_{12,12,0.975}$ ，故

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{12,12,0.025}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{12,12,0.025}$$

- 查表可知 $F_{12,12,0.025}=3.28$，將 $S_1^2=153\times10^6$、$S_2^2=541\times10^6$ 代入可得

$$\frac{153\times10^6}{541\times10^6}\frac{1}{3.28} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{153\times10^6}{541\times10^6}3.28$$

$$\Rightarrow 0.086 \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le 0.928$$

兩獨立母體變異數比 σ_1^2/σ_2^2 的假設檢定

- 現在要檢定的虛無假設為 $H_0:\sigma_1^2/\sigma_2^2=1$。
- 檢定統計量：F 統計量

$$F=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

  - 當虛無假設 $H_0:\sigma_1^2/\sigma_2^2=1$ 成立時，F 統計量簡化為[把虛無假設當中的母體參數假設值 $\sigma_1^2/\sigma_2^2=1$ 代入 F 統計量中]

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

[<u>**虛無分配**</u>：虛無假設成立時檢定統計量的抽樣分配]

- 三種對立假設及拒絕法則：令 $F_{n_1-1,n_2-1,\alpha}$ 為 F_{n_1-1,n_2-1} 分配的右尾 α 臨界值，$F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha}$ 為 F_{n_1-1,n_2-1} 分配的左尾 α 臨界值，$F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}$、$F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}$ 分別為 F_{n_1-1,n_2-1} 分配的右尾、左尾 $\alpha/2$ 臨界值。

檢定	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 對立假設	$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$

亦可寫為

虛無假設 對立假設	$H_0:\sigma_1^2/\sigma_2^2=1$ $H_1:\sigma_1^2/\sigma_2^2\neq1$	$H_0:\sigma_1^2/\sigma_2^2=1$ $H_1:\sigma_1^2/\sigma_2^2<1$	$H_0:\sigma_1^2/\sigma_2^2=1$ $H_1:\sigma_1^2/\sigma_2^2>1$
接受域	$F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}\le F$ $\le F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}$	$F\ge F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha}$	$F\le F_{n_1-1,n_2-1,\alpha}$
拒絕域	$F<F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}$ 或 $F>F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}$	$F<F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha}$	$F>F_{n_1-1,n_2-1,\alpha}$

- 在尋找左尾臨界值時需透過底下關係

$$F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha}=\frac{1}{F_{n_2-1,n_1-1,\alpha}}\text{、}F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}=\frac{1}{F_{n_2-1,n_1-1,\alpha/2}}$$

- 簡化的決策法則：
  - 若虛無假設 $H_0:\sigma_1^2/\sigma_2^2=1$ 是正確的，則 F 統計量 $F=S_1^2/S_2^2$ 應該約略等於 1；若虛無假設錯誤，則 F 統計量不是比 1 大很多就是比 1 小很多。
  - 若在設定母體變異數的符號時，<u>把樣本變異數較大的母體設定為母體 1</u>，則 F 統計量只可能比 1 還大。此時左尾檢定絕對無法拒絕虛無假設，因此不需加以考慮；而雙尾檢定只有在右尾時可拒絕虛無假設。
  - 在此情況下可把決策法則簡化為
    - ■ 單尾(右尾)檢定：F 值 $>F_{n_1-1,n_2-1,\alpha}$ 時拒絕虛無假設 H_0。
    - ■ 雙尾檢定：F 值 $>F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}$ 時拒絕虛無假設 H_0。
  - 實務上我們通常喜歡這麼做，因為統計學教科書中僅列出右尾臨界值。

- 例子(p.500 個案研究)：財務上通常以報酬率的標準差(或變異數)來衡量一檔股票的風險。底下是友訊與智邦兩檔股票在 2005 年 1 月至 2008 年 8 月間 44 個月的月報酬樣本統計資訊。

公 司	平均數	標準差	樣本數
友訊	51.7023	19.0039	44
智邦	16.1568	3.3122	44

請在 $\alpha = 0.05$ 的顯著水準下，檢定友訊與智邦的風險是否相同。

- 令 σ_1^2 為友訊股價報酬率的變異數，σ_2^2 為智邦股價報酬率的變異數。由題意知：

$$n_1 = 44 \text{ 、 } S_1 = 19.0039$$
$$n_2 = 44 \text{ 、 } S_2 = 3.3122$$

- 虛無假設與對立假設

$$H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$$
$$H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 > 1$$

- 欲檢定該組假設 F 統計量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

由於 $n_1 = 44$ 、 $n_2 = 44$，F 統計量具有 $F_{43,43}$ 分配。

- 臨界值：在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，根據 $F_{43,43}$ 分配所找出的右尾臨界值為 1.6607 (查表可約略取 $F_{40,40,0.05} = 1.69$)。
- 樣本 F 統計量：將 $S_1 = 19.0039$ 、 $S_2 = 3.3122$ 代入可得

$$F = \frac{19.0039^2}{3.3122^2} = 32.9194$$

- 結論：樣本 F 統計量(32.9194)大於臨界值 1.6607，故拒絕虛無假設，接受對立假設；亦即，『在 $\alpha = 0.05$ 的顯著水準下，友訊股票報酬率的風險顯著大於智邦股票報酬率的風險』。

樣本數的選擇

- 假設兩獨立樣本個數相等，$n_1 = n_2 = n$，以簡化分析。

估計兩母體平均數差 $\mu_1 - \mu_2$ 時之樣本數選擇：

- **假設兩獨立母體[未假設母體分配]，母體變異數 σ_1^2 、 σ_2^2 已知：**
  $\mu_1 - \mu_2$ 的 $(1-\alpha)$ 信賴區間為 $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$，式中 $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n}}$。因此抽樣誤差上限為

$$|(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)| \le Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n}}$$

若要求抽樣誤差不得超過 d，則隱含

$$Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \le d$$

$$\Rightarrow Z_{\alpha/2}^2 \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{n} \le d^2 \Rightarrow \boxed{n \ge \frac{Z_{\alpha/2}^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{d^2}}$$

- **若母體變異數 σ_1^2 、 σ_2^2 未知：** $\boxed{n \ge \frac{Z_{\alpha/2}^2 (S_1^2 + S_2^2)}{d^2}}$

- **估計兩母體比例差 $p_1 - p_2$ 時之樣本數選擇**
  - 由於母體比例差 $p_1 - p_2$ 的 $(1-\alpha)$ 信賴區間為

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm Z_{\alpha/2} S_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} \text{，式中 } S_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n}}$$

因此抽樣誤差上限為 $|(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)| \le Z_{\alpha/2} S_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}$

若要求抽樣誤差不得超過 d，則隱含

$$Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n}} \le d \Rightarrow Z_{\alpha/2}^2 \frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1 + \hat{p}_2 \hat{q}_2}{n} \le d^2 \Rightarrow \boxed{n \ge Z_{\alpha/2}^2 \frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1 + \hat{p}_2 \hat{q}_2}{d^2}}$$

  - 保守估計：此時的 $S_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{n} + \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{n}} = \sqrt{\frac{0.5}{n}}$，因此抽樣誤差不超過 d 的最小樣本個數須滿足

$$Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{0.5}{n}} \le d \Rightarrow Z_{\alpha/2}^2 \frac{0.5}{n} \le d^2 \Rightarrow \boxed{n \ge Z_{\alpha/2}^2 \frac{0.5}{d^2}}$$