第八章　投資組合理論的應用

本章大綱

- 8.1 投資組合的報酬與風險
- 8.2 投資組合的風險分散
- 8.3 效率前緣與投資組合的選擇
- 8.4 資本資產訂價模式與套利訂價理論

投資組合的報酬與風險

- 基金投資組合是由各種資產所組合而成，其中可能包括銀行存款、短期票券、股票、債券及衍生性金融商品等金融工具。 基金投資組合的報酬與風險，則會因組合內個別資產的種類及其個別的投資比重而有不同。
- 個別資產的種類愈少(多)，基金投資組合的報酬與風險表現受單一種類資產的影響愈大(小)；投資比重愈高(低)個別資產，對基金投資組合的影響愈大(小)。
  - 例如：基金投資組合中僅有1檔台積電股票，則台積電股票的報酬與風險完全主導基金投資組合的表現；但若基金投資組合中有100檔股票，則台積電股票將無法主導基金投資組合的表現(除非台積電的投資比重遠大於其他99檔股票) 。

如何衡量基金投資組合的報酬

- 可將組合內個別資產報酬率的加權平均值，用來衡量基金投資組合的報酬率 。

$$R_P = R_1 \times w_1 + R_2 \times w_2 + \cdots\cdots + R_n \times w_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} R_i \times w_i$$

R_p：基金投資組合的報酬率

R_i：第i種資產的報酬率

w_i：第i種資產佔的投資比重

圖8-1 甲、乙股票過去12個月的月報酬率表現

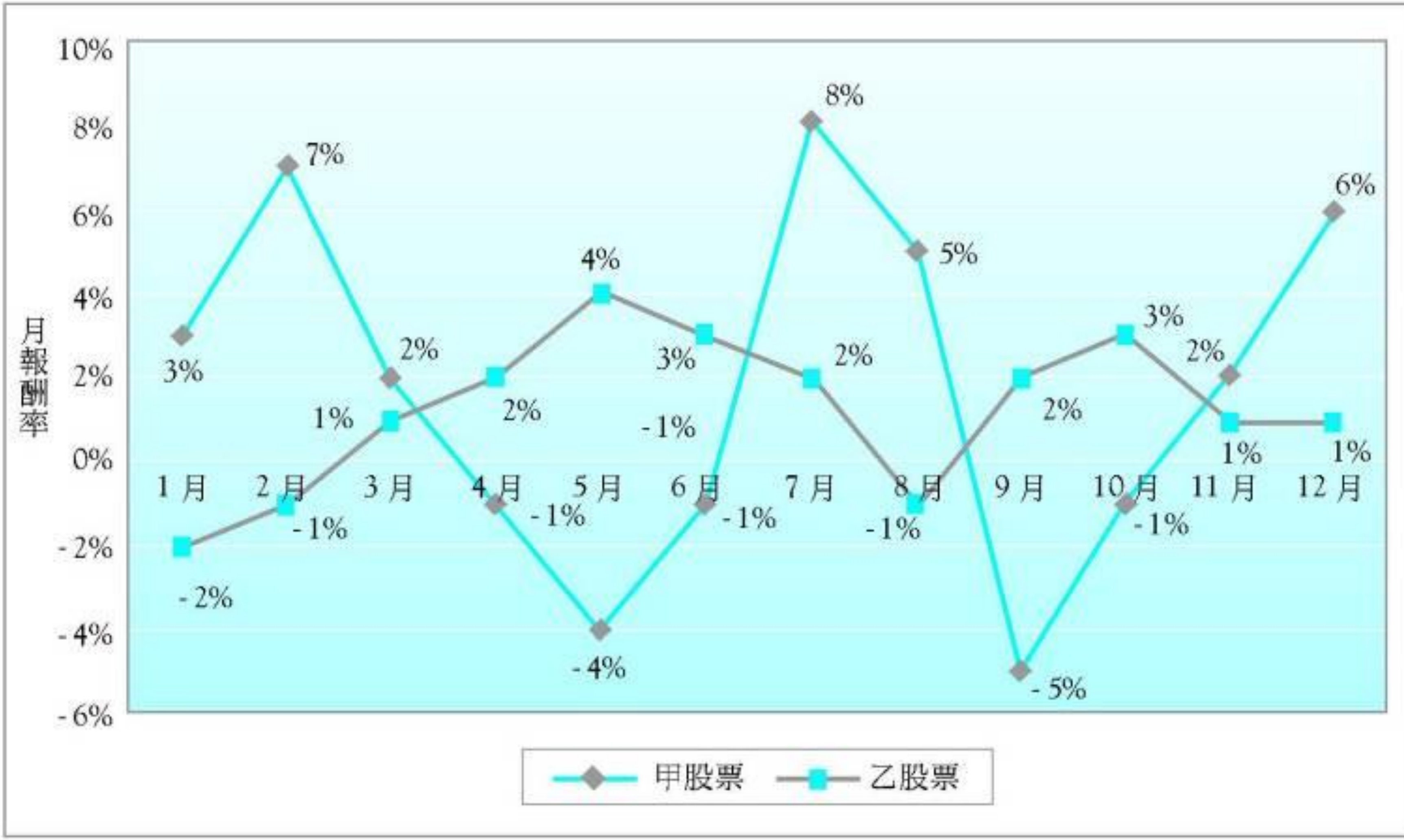


表8-1 基金投資組合的月報酬率及平均月報酬率

	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月	平均
$R_{甲}$	3%	7%	2%	-1%	-4%	-1%	8%	5%	-5%	-1%	2%	6%	1.75%
$R_{乙}$	-2%	-1%	1%	2%	4%	3%	2%	-1%	2%	3%	1%	1%	1.25%
R_p	1.00%	3.80%	1.60%	0.20%	-0.80%	0.60%	5.60%	2.60%	-2.20%	0.60%	1.60%	4.00%	1.55%

- 基金投資於甲、乙兩股票的比重分別為60%、40%
- 則基金投資組合在1月的月報酬率為

  $60\% \times 3\% + 40\% \times (-2\%) = 1\%$
- 投資組合的平均月報酬率可由12個月的R_p加以平均後求得(1.55%)，或由兩股票的平均月報酬率求得

  $60\% \times 1.75\% + 40\% \times (1.25\%) = 1.55\%$

如何衡量基金投資組合的風險(1 / 3)

- 基金投資組合本身的風險，也可以標準差來衡量。

$$\hat{\sigma}_P = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(R_{P,t} - \overline{R_p})^2}{n-1}}$$

- 我們也可以利用組合內個別資產的標準差及相關係數等資料，計算基金投資組合的報酬率標準差。

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_1^2 \times w_1^2 + \sigma_2^2 \times w_2^2 + 2 \times w_1 \times w_2 \times \rho_{1,2} \times \sigma_1 \times \sigma_2}$$

$$\rho_{1,2} = \frac{Cov(R_1, R_2)}{\sigma_1 \times \sigma_2}$$

- 一般化：$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} w_i w_j \operatorname{cov}(R_i, R_j)$

如何衡量基金投資組合的風險(2/3)

- 以樣本來估計基金投資組合的報酬率標準差及組合內個別資產的相關係數。

$$\hat{\sigma}_P = \sqrt{\hat{\sigma}_1^2 \times w_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 \times w_2^2 + 2 \times w_1 \times w_2 \times \hat{\rho}_{1,2} \times \hat{\sigma}_1 \times \hat{\sigma}_2}$$

$$\hat{\rho}_{1,2} = \frac{\hat{\mathrm{Cov}}(R_1, R_2)}{\hat{\sigma}_1 \times \hat{\sigma}_2} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(R_{1,t} - \overline{R_1}) \times (R_{2,t} - \overline{R_2})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n}(R_{1,t} - \overline{R_1})^2} \times \sqrt{\sum_{t=1}^{n}(R_{2,t} - \overline{R_2})^2}}$$

- $\rho_{1,2}$為資產1與資產2的相關係數，其數值介於−1~+1之間，用來衡量兩資產報酬率間的連動性。

如何衡量基金投資組合的風險(3 / 3)

- 若兩資產報酬率間的相關係數為正：代表兩資產間的報酬率變動具有正向的關係，(在大部分的時間)兩資產報酬率會在同一期間出現同時上漲或下跌的情況。
- 若兩資產報酬率間的相關係數為負：代表兩資產間的報酬率變動具有反向的關係，(在大部分的時間)當一資產的報酬率上漲時，另一資產的報酬率則會下跌，產生損益互抵的情況。
- 圖8-1的例子：可明顯看出甲股票與乙股票的報酬率變動具有反向的關係(負相關)，因為在大部分的時間裡，甲股票的報酬率上漲時，乙股票的報酬率則會下跌，使基金投資組合的報酬率產生損益互抵的情況，因而產生風險分散的效果。

投資組合的風險分散

- 常有人以「不要將所有的雞蛋放在同一個籃子裡」來詮釋風險份散的觀念，但這不完全正確。
- 如果將所有的籃子放在同一個地方，所面對的翻覆或被偷的風險相同，即使將雞蛋放入不同的籃子，仍無法避免損失所有雞蛋的風險。若要有效分散風險，也必須將不同的籃子放置在不同的地方。
- 若將上述的例子套用在基金操作上，雞蛋好比是共同基金的資金，籃子則是共同基金所能投資的資產，而籃子放置的地方則是組合內個別資產的同質性或連動性(報酬率相關程度)
- 若共同基金持有愈多異質性(或連動性不高)的資產，其風險分散能力愈好；反之，若基金所持有之同質性(連動性較高)資產愈多，風險分散能力就會較差。
- 底下就詳細地看一下資產間的連動性(報酬率相關程度)對風險分散有何影響。

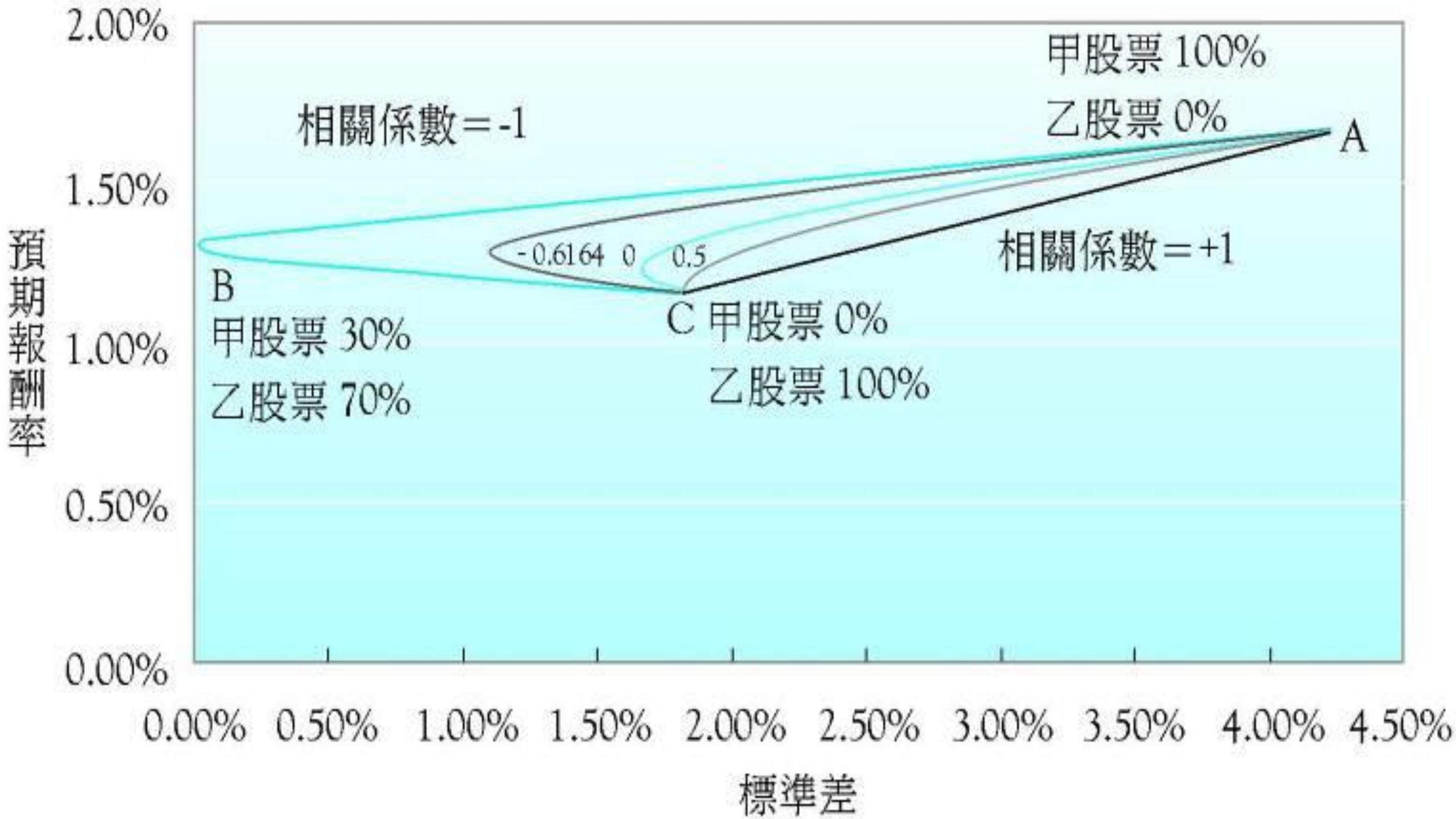
相關係數對風險分散的影響

- 當組合內個別資產間的相關係數等於+1時，基金投資組合報酬率的標準差剛好會等於個別資產報酬率標準差的加權平均值，無任何的風險分散效果。
- 只要組合內個別資產間的相關係數小於+1，即能分散風險；且相關係數的數值愈小，風險分散的效果愈好。
- 若組合內個別資產間的相關係數能達到–1（完全負相關），基金投資組合報酬率的標準差即等於個別資產報酬率標準差的相減絕對值，風險分散的效果最好。
- 一般而言，資產間的相關係數都小於+1，因此增加投資組合內的資產數目可有效降低投資組合風險。

表8-2 相關係數對風險分散的影響

$w_{甲}$	$w_{乙}$	R_p	甲、乙兩股票之報酬率相關係數（$\rho_{甲,乙}$）				
			1	0.5	0	-0.6164	-1
0%	100%	1.25%	1.82%	1.82%	1.82%	1.82%	1.82%
10%	90%	1.30%	2.06%	1.89%	1.69%	1.42%	1.21%
20%	80%	1.35%	2.31%	2.02%	1.69%	1.15%	0.61%
30%	70%	1.40%	2.55%	2.21%	1.80%	1.12%	0.00%
40%	60%	1.45%	2.79%	2.44%	2.02%	1.34%	0.61%
50%	50%	1.50%	3.04%	2.70%	2.31%	1.72%	1.22%
60%	40%	1.55%	3.28%	2.98%	2.65%	2.18%	1.82%
70%	30%	1.60%	3.52%	3.28%	3.02%	2.67%	2.43%
80%	20%	1.65%	3.76%	3.60%	3.42%	3.19%	3.04%
90%	10%	1.70%	4.01%	3.92%	3.83%	3.72%	3.64%
100%	0%	1.75%	4.25%	4.25%	4.25%	4.25%	4.25%

圖8-2 不同相關係數及投資比重之基金投資組合的報酬與風險關係



風險分散的極限(1/2)

- 有沒有辦法把基金投資組合的風險完全分散掉，使基金投資組合完全沒有風險？
  - 若可以找到相關係數等於−1的兩個資產，只要將資產權重調整成$w_1/w_2=\sigma_1/\sigma_2$，即可將投資組合的風險降到0。因為

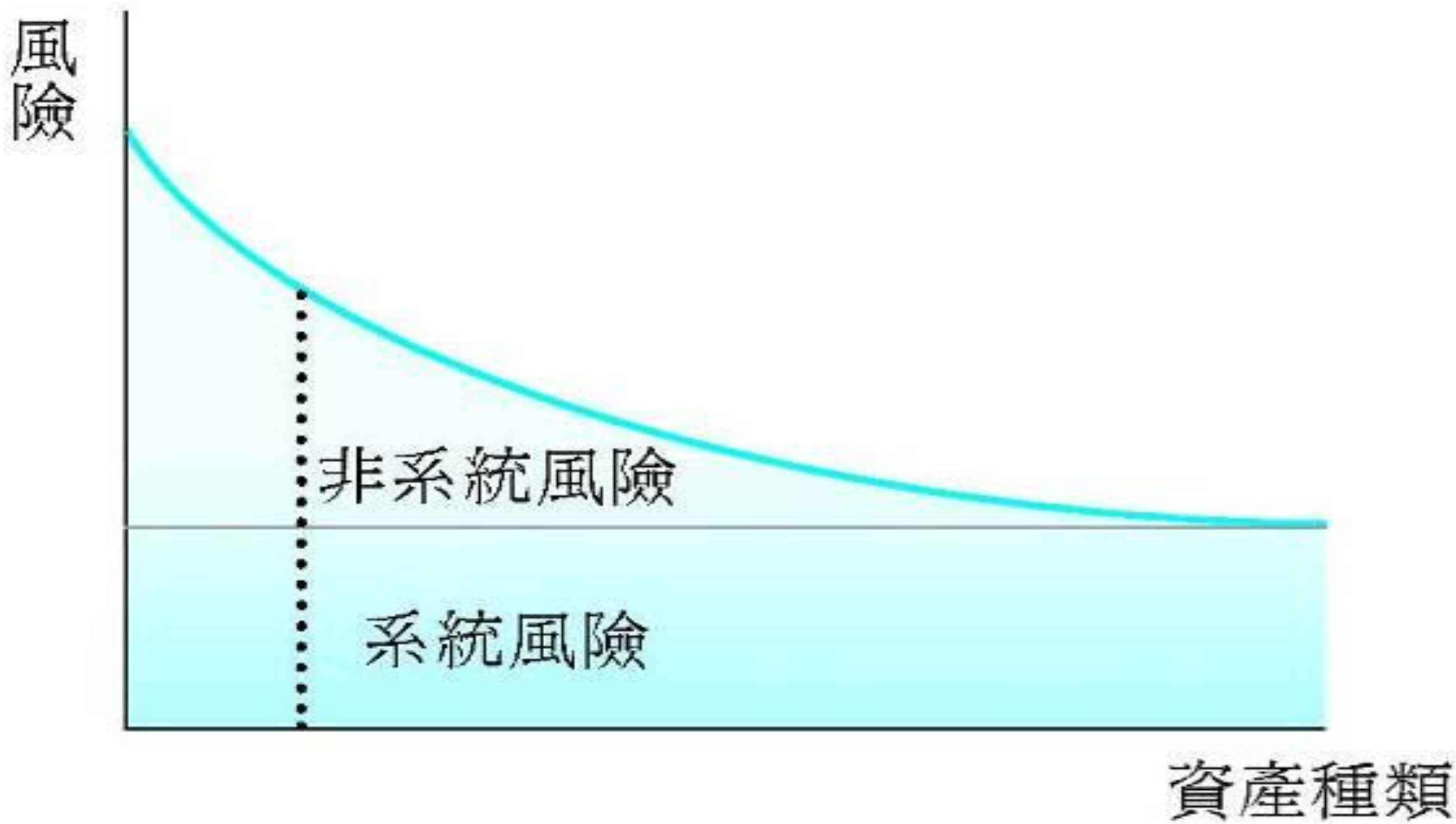
$$
\begin{aligned}
\sigma_P &= \sqrt{\sigma_1^2\times w_1^2+\sigma_2^2\times w_2^2+2\times w_1\times w_2\times\rho_{1,2}\times\sigma_1\times\sigma_2} \\
&= \sqrt{\sigma_1^2\times w_1^2+\sigma_2^2\times w_2^2+2\times w_1\times w_2\times(-1)\times\sigma_1\times\sigma_2} \\
&= \sqrt{(w_1\sigma_1-w_2\sigma_2)^2} = |w_1\sigma_1-w_2\sigma_2| = 0 \quad 若 w_1/w_2=\sigma_1/\sigma_2
\end{aligned}
$$

  - 但在現實環境中，相關係數為−1的資產並不容易找到[同類型資產(如股票)間的相關係數通常為正，股債間也許具負相關，但相關係數不可能是−1]，因此要將基金的風險完全分散掉，在實務上幾乎很難達成。無論如何分散風險，基金投資組合一定會有部分的風險。

風險分散的極限(2/2)

- 若基金經理人能持續增加基金投資組合的資產種類，且這些新加入的資產與原基金投資組合的相關係數小於+1時，將可持續擴大風險分散效果，使基金投資組合的風險愈來愈小。
- 例如：若甲股票為科技股、乙股票為金融股，若加入塑化股的丙股票(與科技股跟金融股的相關係數不可能是+1) ，對風險分散應有貢獻。
- 但透過多角化投資所能分散的風險，多屬因個別資產所產生的風險，如每一家公司都有個自所面對的財務風險，不太可能三家公司同時出現財務風險，因此持有多家公司股票可分散掉個別公司的風險。這種可分散的風險稱為非系統性風險、公司特有風險。
- 但是，所有股票都會受到整體經濟因素的影響(如通膨、利率、匯率、政治情勢) ，這些因素是無法透過多角化加以消除的風險，稱為系統性風險。
- 結論：透過多角化來分散投資組合的風險是有極限的，不管如何進行多角化，投資組合一定會存在系統性風險。

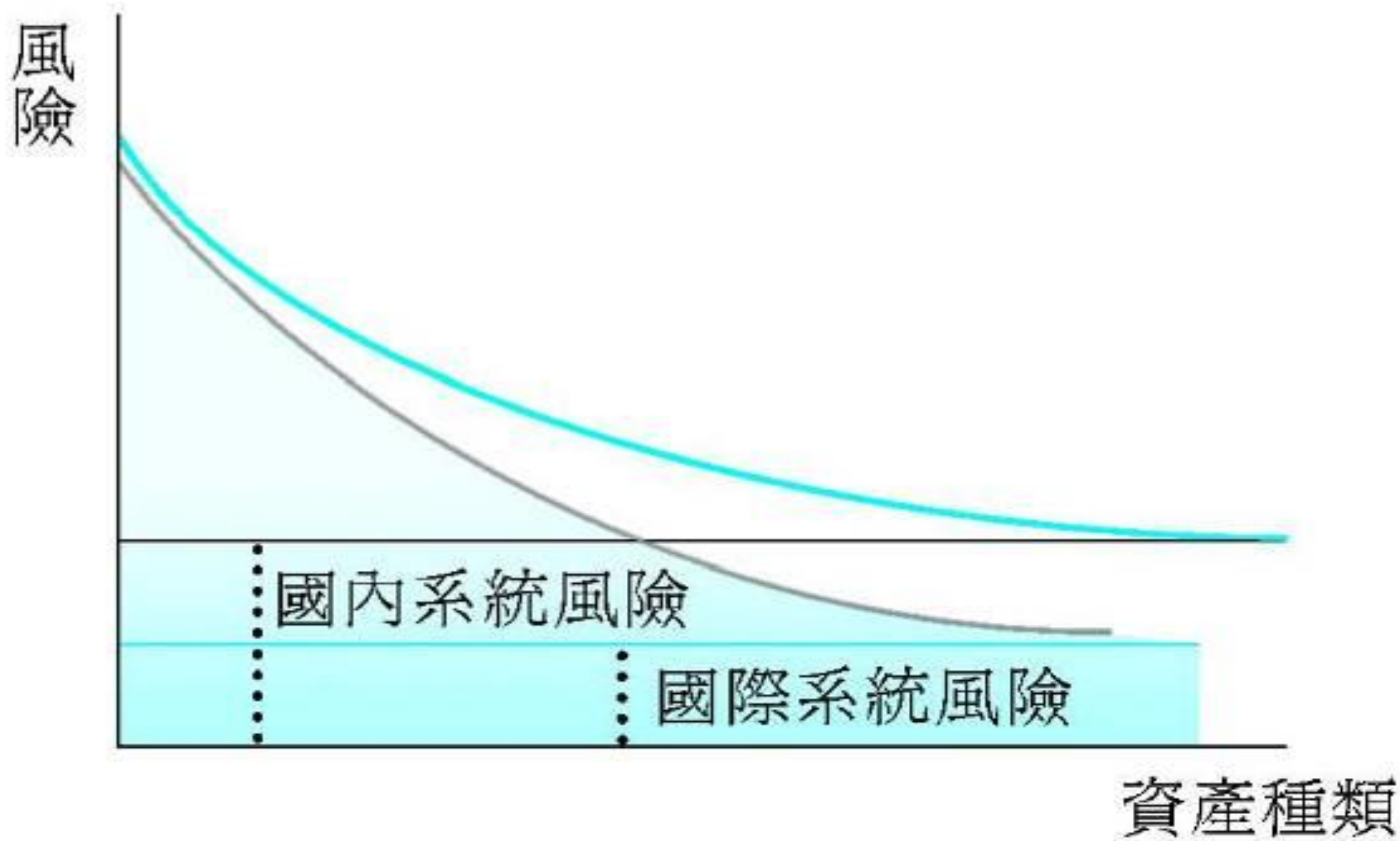
圖8-3 多角化投資的風險分散極限



國際投資的風險分散效果

- 若將投資標的擴及全球，風險分散效果會更好。
  - 原因是：個別國家還是有其獨特的風險，如921地震、911攻擊、南亞海嘯、政變、日本311宮城大地震，每一個獨特事件可能都會衝擊某個國家，影響該國家的資產價值，但不可能全世界的國家同時都發生對總體經濟有重大影響的事件(這次金融海嘯除外)。
- 但國際多角化的風險分散效果還是有其極限，因為全世界的經濟還是會同時受到某些因素的影響(金融海嘯、原油價格飆漲)。所以國際多角化雖能分散個別國家的獨特風險，但終究還是有無法分散的系統風險。
  - 全球化的程度越高，世界經濟的連動關係越強，國際系統風險會越高

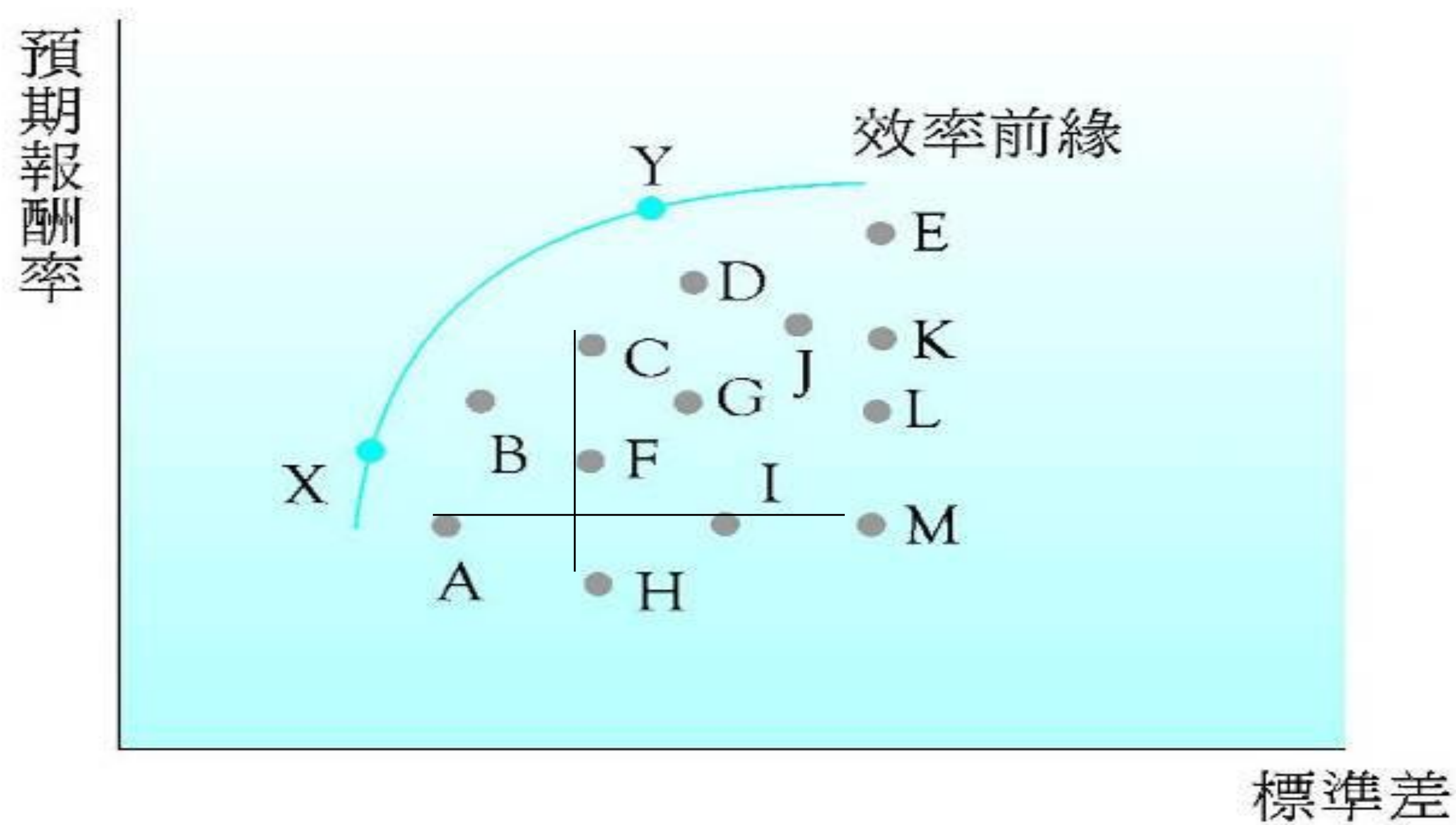
圖8-4 國際化投資的風險分散極限



效率前緣與投資組合的選擇

- 效率前緣
  - 不同的資產權重配置，就會產生不同的投資組合預期報酬率與風險。到底基金經理人應該選擇哪種資產配置呢？
  - 假設基金經理人具有風險規避的態度(愛好報酬、討厭風險)，亦即在相同預期報酬率下，會選擇風險較低的資產；反之，在相同風險下，則會選擇預期報酬率較高的資產。
  - 將符合「在相同預期報酬率下，風險最低」，且「在相同風險下，預期報酬率最高」原則之投資組合連成一線，即可得到效率前緣。(參見下圖8-5)
- 基金經理人須依據共同基金的投資目標及風險規避的程度，選擇合適的效率組合進行投資；如積極成長型基金目的在追求資本利得極大化，會選擇組合Y，較為保守的收益型基金則會選擇組合X。

圖8-5 效率前緣



如何畫出效率前緣

- 表8–3：A、B、C、D的報酬率、標準差以及彼此之間的相關係數

表 7-3 A、B、C、D 的報酬率、標準差以及彼此之間的相關係數

	標準差	預期報酬率	相關係數			
			A	B	C	D
A	21.10%	15.70%	1.00	0.37	0.53	0.26
B	25.00%	21.70%	0.37	1.00	0.47	0.36
C	23.50%	18.30%	0.53	0.47	1.00	0.43
D	26.60%	17.30%	0.26	0.36	0.43	1.00

線性規劃的公式

$$\text{MIN}\quad \sigma_P^2 = \mathrm{w}_\mathrm{A}^2 \times \sigma_\mathrm{A}^2 + \mathrm{w}_\mathrm{B}^2 \times \sigma_\mathrm{B}^2 + \mathrm{w}_\mathrm{C}^2 \times \sigma_\mathrm{C}^2 + \mathrm{w}_\mathrm{D}^2 \times \sigma_\mathrm{D}^2$$

$$+2\times \mathrm{w}_\mathrm{A} \times \mathrm{w}_\mathrm{B} \times Cov(R_\mathrm{A}, R_\mathrm{B}) + 2\times \mathrm{w}_\mathrm{A} \times \mathrm{w}_\mathrm{C} \times Cov(R_\mathrm{A}, R_\mathrm{C})$$

$$+2\times \mathrm{w}_\mathrm{A} \times \mathrm{w}_\mathrm{D} \times Cov(R_\mathrm{A}, R_\mathrm{D}) + 2\times \mathrm{w}_\mathrm{B} \times \mathrm{w}_\mathrm{C} \times Cov(R_\mathrm{A}, R_\mathrm{B})$$

$$+2\times \mathrm{w}_\mathrm{B} \times \mathrm{w}_\mathrm{D} \times Cov(R_\mathrm{A}, R_\mathrm{C}) + 2\times \mathrm{w}_\mathrm{C} \times \mathrm{w}_\mathrm{D} \times Cov(R_\mathrm{C}, R_\mathrm{D})$$

$$\text{S.T.}\quad \mathrm{E(R_P)} = \mathrm{E(R_A)} \times \mathrm{w_A} + \mathrm{E(R_B)} \times \mathrm{w_B} + \mathrm{E(R_C)} \times \mathrm{w_C} + \mathrm{E(R_D)} \times \mathrm{w_D} = \text{限制值}$$

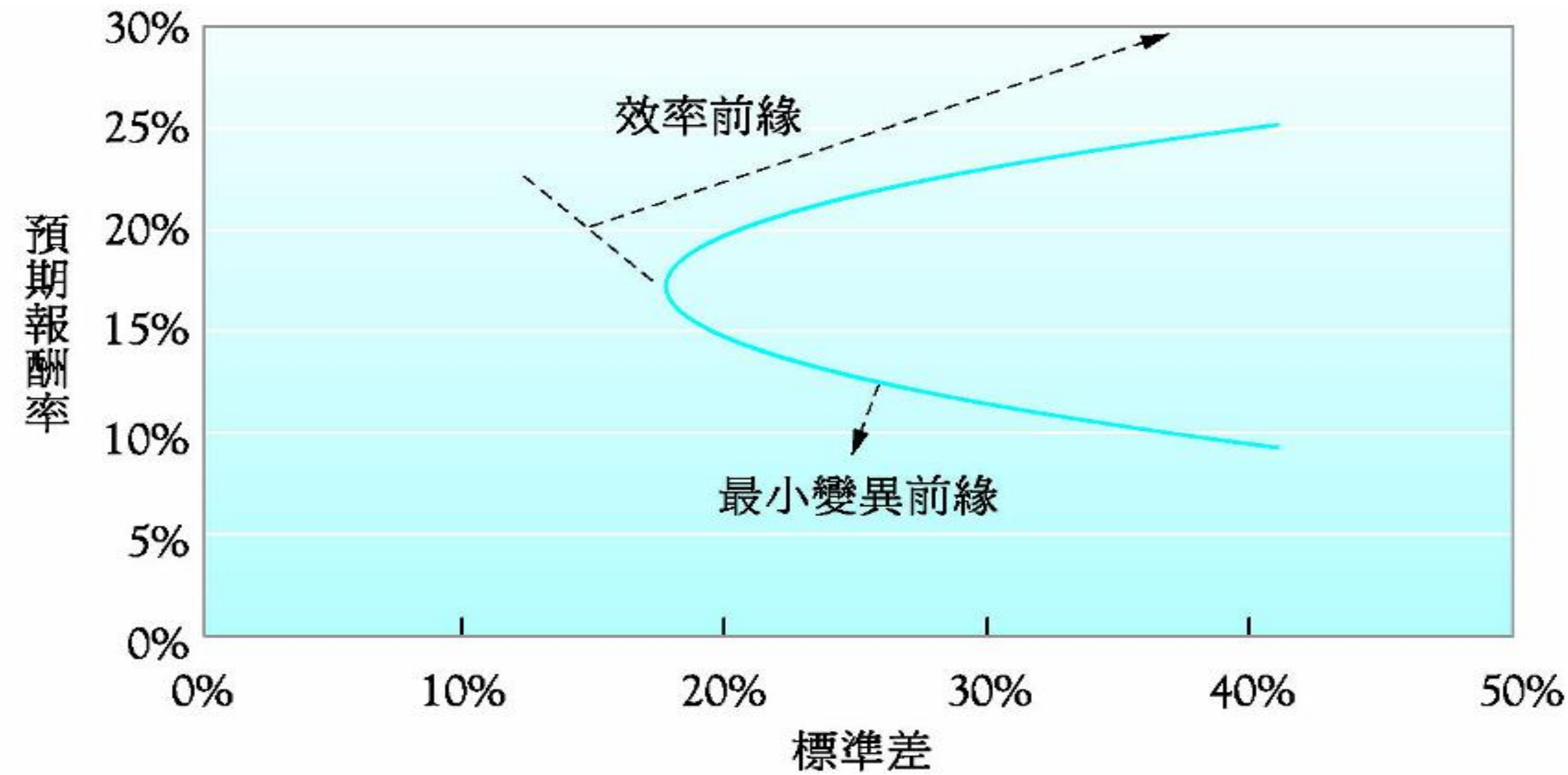
$$\mathrm{w_A} + \mathrm{w_B} + \mathrm{w_C} + \mathrm{w_D} = 1$$

投資組合最技術性的地方圍繞著兩個問題：『如何估計資產的預期報酬率、變異數、資產間的相關係數』、『如何在給定的預期報酬率限制下，找到風險最低的投資組合』

表8-4 每一報酬率水準下能讓投資組合風險達到最小的資產配置比重

報酬率	標準差	資產配置比重			
		A	B	C	D
9%	40.08%	176.44%	-120.75%	-16.39%	60.70%
10%	36.36%	161.14%	-104.36%	-12.99%	56.21%
11%	32.75%	145.85%	-87.97%	-9.59%	51.71%
12%	29.30%	130.55%	-71.57%	-6.20%	47.22%
13%	26.06%	115.25%	-55.18%	-2.80%	42.73%
14%	23.12%	99.96%	-38.79%	0.60%	38.23%
15%	20.62%	84.66%	-22.39%	4.00%	33.74%
16%	18.73%	69.37%	-6.00%	7.39%	29.24%
17%	17.64%	54.07%	10.39%	10.79%	24.75%
18%	17.51%	38.78%	26.78%	14.19%	20.25%
19%	18.36%	23.48%	43.18%	17.58%	15.76%
20%	20.07%	8.18%	59.57%	20.98%	11.26%
21%	22.43%	-7.11%	75.96%	24.38%	6.77%
22%	25.27%	-22.41%	92.36%	27.77%	2.28%
23%	28.44%	-37.70%	108.75%	31.17%	-2.22%
24%	31.85%	-53.00%	125.15%	34.57%	-6.71%
25%	35.42%	-68.30%	141.54%	37.97%	-11.21%
26%	39.12%	-83.59%	157.93%	41.36%	-15.70%

圖8-6 A、B、C、D四種資產的效率前緣



加入資本市場與無風險資產後的效率前緣

- 無風險資產的報酬率(R_f)是固定的，標準差為0，與風險性資產組合的相關係數為0
- 若投資人把w_M比例的資金投資於風險性資產組合M (期預期報酬率為E(R_M)，標準差為σ_M)，則投資組合的預期報酬率與標準差分別為(亦即效率前緣的方程式：資本市場線)

$$\mathrm{E(R_P)} = \mathrm{R}_f \times (1 - \mathrm{w}_M) + E(\mathrm{R}_M) \times \mathrm{w}_M$$

$$\sigma_\mathrm{P} = \sqrt{\sigma_M^2 \times \mathrm{w}_\mathrm{M}^2 + \sigma_f^2 \times \mathrm{w}_\mathrm{f}^2 + 2 \times \mathrm{w}_M \times \mathrm{w}_f \times \rho_{f,M} \times \sigma_f \times \sigma_M}$$

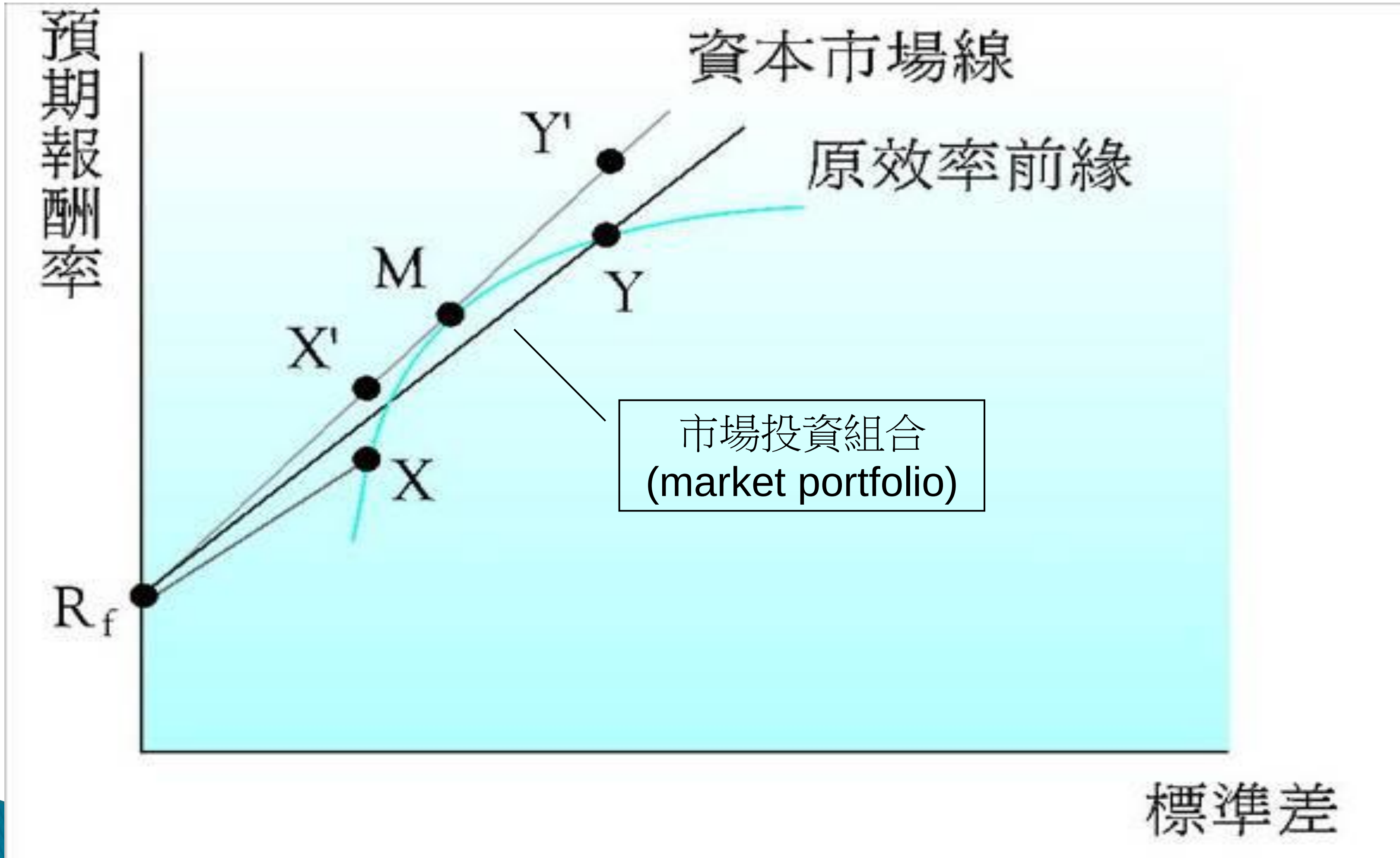
$$= \sqrt{\sigma_M^2 \times \mathrm{w}_\mathrm{M}^2} = \sigma_M \times \mathrm{w}_\mathrm{M}$$

$$\Rightarrow \mathrm{w}_\mathrm{M} = \sigma_\mathrm{P} / \sigma_M$$

$$\mathrm{E(R_P)} = \mathrm{R}_f \times (1 - \sigma_\mathrm{P} / \sigma_M) + E(\mathrm{R}_M) \times \sigma_\mathrm{P} / \sigma_M$$

$$= \mathrm{R}_f + \frac{E(\mathrm{R}_M) - \mathrm{R}_f}{\sigma_M} \times \sigma_\mathrm{P}$$

圖8-7 資本市場線



資本資產訂價模式 (Capital Asset Pricing Model)

- CAPM：在市場均衡時，所有投資人均會持有市場投資組合，將非系統性風險完全消除，僅系統性風險攸關資產的風險溢酬 (亦即系統風險是風險溢酬的唯一驅動因素)

$$E(R_i) = R_f + \beta_i \times [E(R_m) - R_f]$$

- 例如：某股票之β 係數為1.5，無風險資產的報酬率為2%，市場投資組合的預期報酬率為7%，則市場投資組合的預期超額報酬率為5% [=7%−2%] (平均承擔一單位風險所帶來的額外報酬)，該股票的系統風險溢酬為7.5% [=1.5×5%] ，該股票的預期報酬率為9.5% [=2%+7.5%] 。

圖8-8　證券市場線

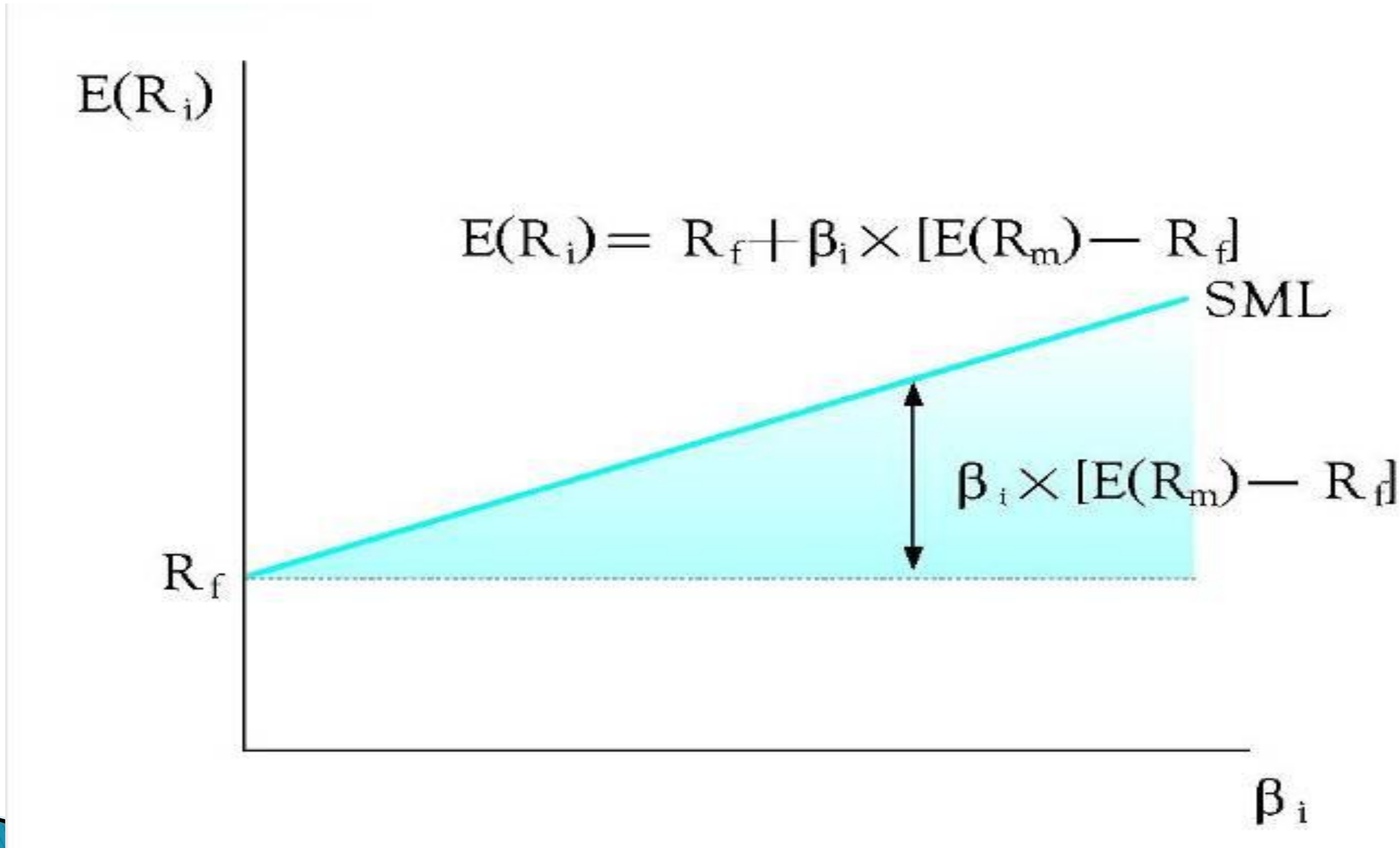
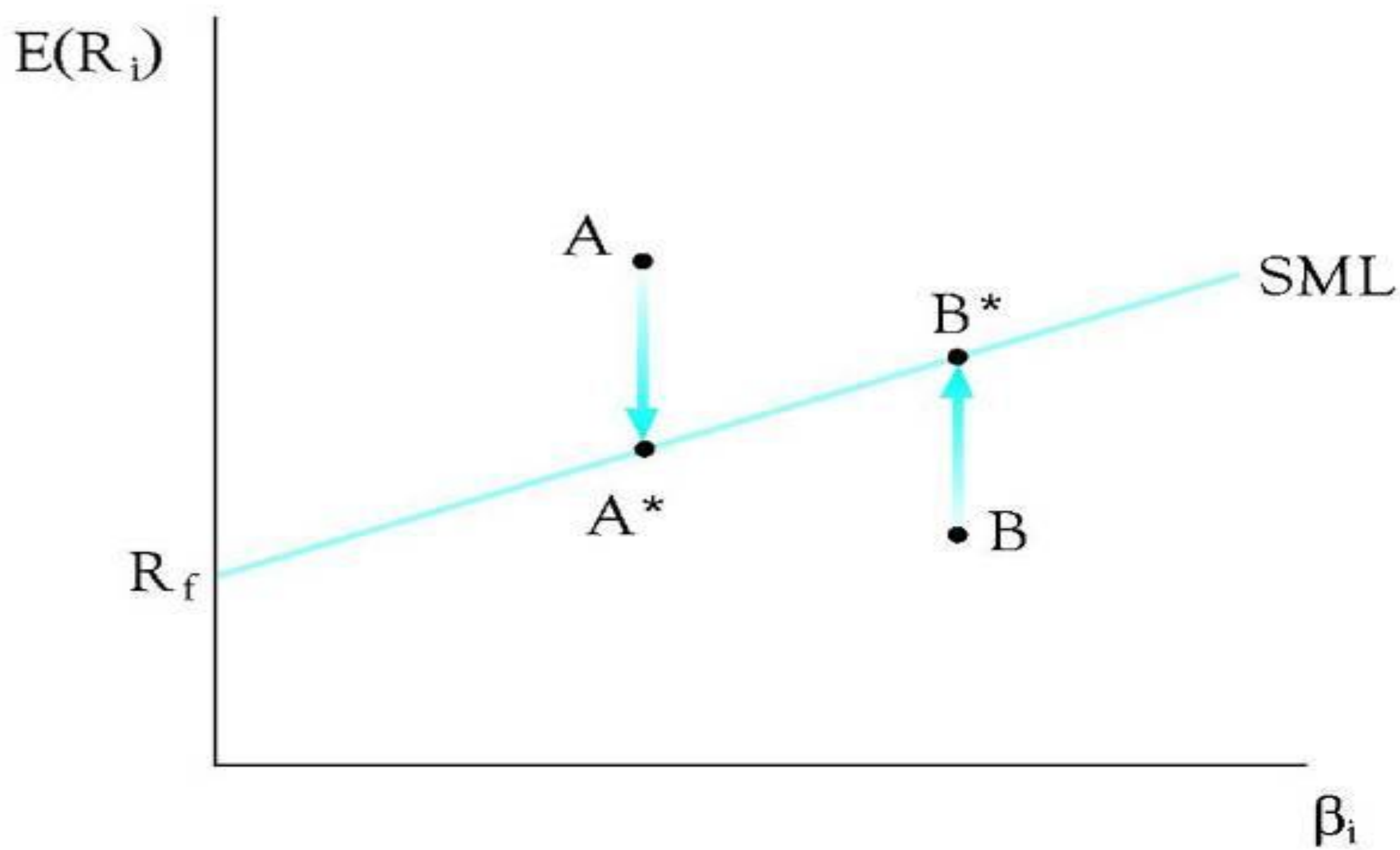


圖8-9 個別資產預期報酬率趨於均衡的過程



套利訂價理論(Arbitrage Pricing Theory)

- APT：除了系統風險外，還有其他因素(因子)會影響到資產的風險溢酬(常用的因子有：長短期利率差、短期利率變動率、匯率變動率、實質GNP變動率、通貨膨脹率)
- 在市場均衡時，個別資產的預期報酬率依然是由無風險資產的報酬率與系統風險溢酬所組成，只不過在APT中，系統分險溢酬來自於多個因子的影響，若該資產暴露於某個因子的風險程度較大，則該因子所帶來的系統風險溢酬較大

$$
\begin{aligned}
E(R_i) = R_f + b_{i,1} \times [E(R_1) - R_f] + b_{i,2} \times [E(R_2) - R_f] + \cdots \\
+ b_{i,n} \times [E(R_n) - R_f]
\end{aligned}
$$

CAPM與APT的比較

- 兩者皆認為在市場均衡時，個別資產的預期報酬率是由無風險資產的報酬率加上系統風險溢酬來決定。
- CAPM認為市場投資組合的預期報酬率是影響個別資產預期報酬率主要且唯一的因子；而APT則認為不只一個因子會對個別資產的預期報酬產生影響，而是有多個因子，且每一項因子對個別資產預期報酬率的影響程度也不相同。