第 8 章　連續隨機變數及其常用的機率分配

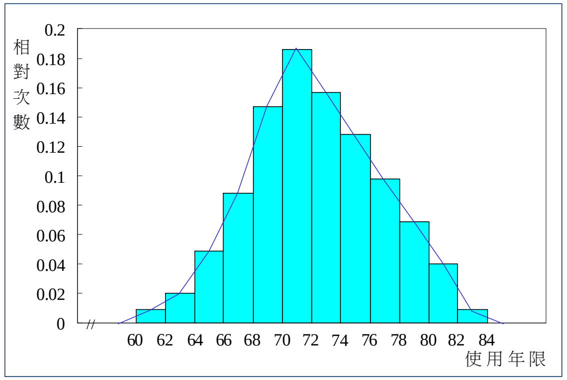
- 間斷隨機變數的機率分配是討論那些隨機變量個數有限，或個數無限但可數的隨機變數。
- 然而，很多隨機變數的變量是不可數的，其變量的可能數值發生在某一區間，這樣的隨機變數稱為**連續隨機變數**。
  - 事實上，大部分的情況是，某些變數的可能變量個數不但很多，而且密集分布於某個區間，若將這種變數視為連續隨機變數處理起來較為方便。
  - 例如：薪資、銷貨收入、時間、溫度、價格、報酬率等。
  - 既然隨機變量發生於某個區間，其個數必然無限且不可數，所以隨機變量為特定數值(區間中的某一點)的機率必為零；因此，要描述連續隨機變數的機率分配時，無法像間斷隨機變數一樣，列出每個隨機變量與其相對應的機率函數；連續隨機變數僅能求其位於某個區間內的機率。

連續隨機變數的機率分配

- 下表是 5,500 個無敵電算機的使用壽命的相對次數分配表。

使用壽命 x	單位組距	次數 f	相對次數
60~62	1	48	0.009
62~64	1	108	0.020
64~66	1	270	0.049
66~68	1	486	0.088
68~70	1	810	0.147
70~72	1	1,026	0.186
72~74	1	864	0.157
74~76	1	702	0.128
76~78	1	540	0.098
78~80	1	378	0.069
80~82	1	216	0.040
82~84	1	52	0.009
		$\sum f = 5{,}500$	1.000

- 將上表畫成底下的相對次數直方圖：

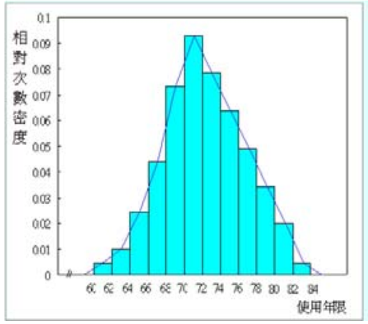


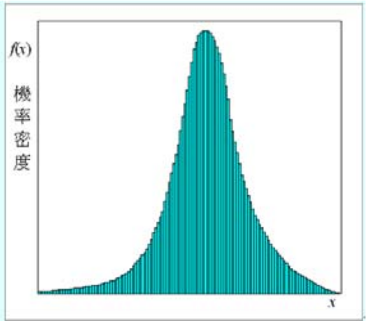
  - 直方圖中的各組的長條高度標示出相對次數(機率)。但如果我們把各組的組距都視為 1，則長條的面積亦可視為相對次數。[例如：70~72 這一組的組距事實上是 2，但若我們把這個組距當成 1，則該組的相對次數(長條高度) = 0.186 = 0.186×1 = 長條高度×長條寬度 = 長條面積]

  - 底下的做法也可以將長條的面積解釋成機率：定義
    相對次數密度＝相對次數÷組距

使用壽命 x（1）	組距（2）	相對次數密度（3）	相對次數 (4) = (2) × (3)
60~62	2	0.0045	0.009
62~64	2	0.0100	0.020
64~66	2	0.0245	0.049
66~68	2	0.0440	0.088
68~70	2	0.0735	0.147
70~72	2	0.0930	0.186
72~74	2	0.0785	0.157
74~76	2	0.0640	0.128
76~78	2	0.0490	0.098
78~80	2	0.0345	0.069
80~82	2	0.0200	0.040
82~84	2	0.0045	0.009
			1.000

- 下圖(左)畫出以相對次數密度為縱軸的直方圖。由之前相對次數密度的定義可知，直方圖中各組長條的面積(相對次數密度×組距)就是該組發生的相對次數(機率)。
- 若我們所觀察到的元素個數很多(如 100000 台計算機的壽命)，則直方圖的組距會變小，直方圖會像下圖(右)所示：相對次數密度的多邊圖會趨近於一條平滑曲線。這條曲線稱為**機率密度函數**，其高度稱為**機率密度**，變數位於某區間內的機率就是機率密度函數底下的面積。





連續隨機變數的機率密度函數

- 連續隨機變數的**機率分配**(probability distribution)：單一連續隨機變數的機率分配是表示，連續隨機變數的任意兩點之間變量的發生機率(或相對次數)的分布情形。
- 連續隨機變數的**機率密度函數**(probability density function)：設 X 為連續隨機變數，其值為 $a \le X \le b$，若 $f(x)$ 滿足下列二條件：

  (1) $f(x) \ge 0$ [任一點之機率密度不為負值 $\Rightarrow$ 任一區間之機率為正]

  (2) $\int_a^b f(x)dx = 1$ [機率總和(機率密度函數底下之總面積)等於 1]

  則稱 $f(x)$ 為 X 的機率密度函數，簡稱 pdf。
  - 若 X 為間斷隨機變數，則機率函數 $f(X=x) = P(X=x)$ 表示變量 x 發生的機率。
  - 若 X 為連續隨機變數，我們用 $f(x)$ 來代表 X 發生變量 x 的<u>機率密度</u>，而<u>不是 X 發生變量 x 的機率</u>。[連續隨機變數發生某特定變量的機率為 0；亦即 $P(X=x)=0$]

- **累加機率函數**(CDF)：連續隨機變數累加到 x 的機率為『a 到 x 這個範圍內機率密度函數底下的面積』

$$F(x) = P(X \le x) = \boxed{\int_a^x f(t)dt}$$

  - 隨機變數介於某範圍內的機率 $P(c < X \le d) = F(d) - F(c)$ $= \int_a^d f(x)dx - \int_a^c f(x)dx = \int_c^d f(x)dx$
- 連續隨機變數之機率分配(不太正式)的數學定義：
  - 累加機率函數只是在算隨機變數小於某個數值 x 的機率，所以不管是間斷隨機變數或連續隨機變數都有累加機率函數 $F(x)$，而累加機率函數的函數值必需介於 $0 \le F(x) \le 1$。
  - 若 X 為連續隨機變數，當我們慢慢增加 x 的數值，則累加機率函數 $F(x)$ 的變化應該很平滑(慢慢地增加，不可能發生像間斷隨機變數一樣的跳躍)。例如將 x 變動到 $x+\Delta x$ 時(其中 Δx 為趨近於 0 的數值)，則累加機率函數的變化量 $F(x+\Delta x) - F(x)$ 應該趨近於 0 [不但連續，而且平滑]。

- 平滑的函數就可以微分。我們將機率密度函數 $f(x)$ 定義為累加機率函數 $F(x)$ 的導函數

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

- 若隨機變數發生的範圍介於 $a \le X \le b$，若要計算 X 小於 x 的機率[亦即累加機率 $F(x) = P(X \le x)$]，可用底下方法

$$dF(x) = f(x)dx \Rightarrow \int_a^x dF(x) = \int_a^x f(x)dx$$

$$\Rightarrow F(x) - \underbrace{F(a)}_{=0} = \int_a^x f(x)dx \Rightarrow \boxed{F(x) = \int_a^x f(x)dx}$$

- 若要計算 X 位於區間 $[x_1, x_2] \subset [a,b]$ 的機率，則使用

$$P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$= \int_a^{x_2} f(x)dx - \int_a^{x_1} f(x)dx = \boxed{\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx}$$

- 連續隨機變數之期望值的計算方法：

$$E(X)=\int_a^b xf(x)dx=\mu \qquad (a\le X\le b)$$

[變量 x 只在很小的區間範圍 dx 內發生，其發生機率為 $f(x)dx$；將變量 x 乘以其發生的機率 $f(x)dx$，將所有可能變量加總起來]

- 連續隨機變數之變異數的計算方法：

$$V(X)=\sigma^2=\int_a^b (x-\mu)^2\cdot f(x)dx$$

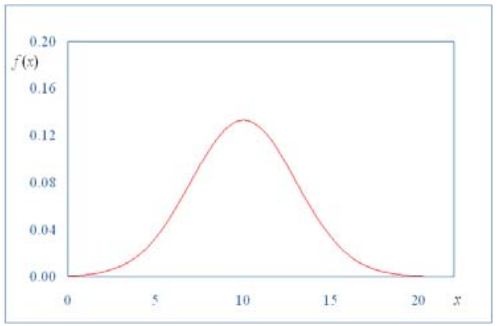
➢ 另一種計算公式

$$\begin{aligned}V(X)&=\int_a^b (x-\mu)^2\cdot f(x)dx=\int_a^b (x^2-2\mu x+\mu^2)\cdot f(x)dx\\&=\int_a^b x^2 f(x)dx-2\mu\int_a^b xf(x)dx+\mu^2\int_a^b f(x)dx\\&=\int_a^b x^2 f(x)dx-2\mu\cdot\mu+\mu^2=\int_a^b x^2 f(x)dx-\mu^2\\&=E(X^2)-[E(X)]^2\end{aligned}$$

- 連續隨機變數之標準差：$\sigma=\sqrt{V(X)}$

常態分配(Normal distribution)

- 許多連續隨機變數(如：某一年齡層的身高、人的智商、某地區的氣溫等)大都會集中於平均數附近，特別大的數值或特別小的數值並不多，而且對稱的分散於平均數兩邊，次數分配曲線像一個鐘型(bell-shaped)，大部分的數值集中於離平均數 3 個標準差之內；這樣的隨機變數稱為**常態隨機變數**(normal r.v.)，其分配稱為**常態分配**。



- 『常態』指的是『一般的、通常的分配狀態』。例如下表所示之某班級計量經濟學成績的分配狀況：

x 計量經濟學學期成績	$P(x)$
0~20	0.0299
20~40	0.2332
40~60	0.4714
60~80	0.2332
80~100	0.0299

➢ 成績介於 40~60 分之間的學生最多，兩旁的 20~40 分與 60~80 分相對較少，成績在 20 分以下及 80 分以上的學生又更少[成績很高的學生跟成績很差的學生是很少見的，大部份都是中等]；亦即大部份學生的成績介在 40~80 分之間。

➢ 像學期成績大部分集中發生於某一範圍，僅有少數發生在該範圍之外，即是統計學所稱的**常態分配**。

- **常態分配的定義**：設 X 為連續隨機變數，若其機率密度函數為：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty<x<\infty$$

式中：$-\infty<\mu<\infty,\ \sigma>0$，$\pi=3.1416$，$e=2.7183$。則稱隨機變數 X 具**常態分配**，$f(x)$ 為**常態分配的機率密度函數**。

➢ 常態分配滿足機率密度函數的二個條件：

(1) $f(x)\ge 0$：很明顯的結果。

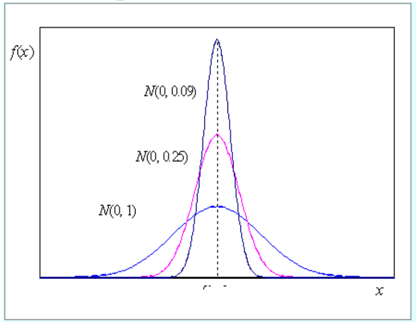
(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

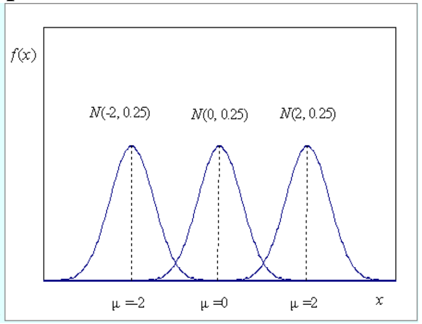
令 $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$，則 $x=\sigma z+\mu$，故 $dx=\sigma dz\Rightarrow\frac{dx}{\sigma}=dz$。因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\frac{dx}{\sigma}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{Z^2}{2}}dz$$

由於 $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{Z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}}$，因此 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1$

- 我們慣用 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 來表示『隨機變數 X 具有平均數為 μ 、變異數為 σ^2 的常態(**N**ormal)分配』。
- 平均數為 μ 與變異數為 σ^2 是常態分配的兩個參數。
- 平均數 μ 決定了常態分配的位置[下圖右]：μ 變動時僅改變 pdf 的位置不改變形狀，μ 越大 pdf 越往正向移動。
- 變異數 σ^2 決定了常態分配的分散程度[下圖左]：σ^2 變動時會改變 pdf 的形狀，σ^2 越大 pdf 看起來越平坦。

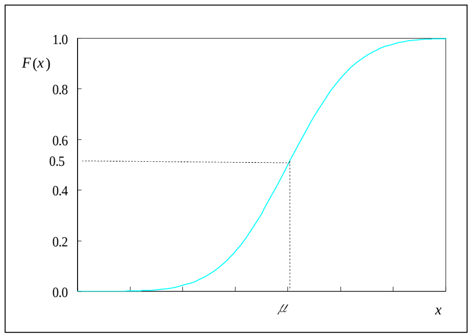




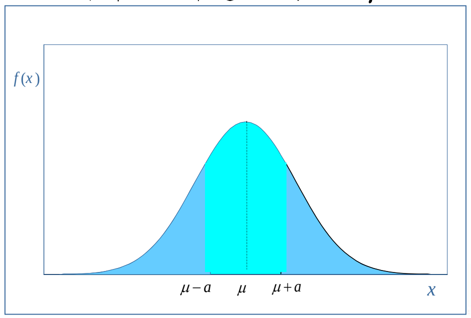
- 常態分配的累加機率函數：$(-\infty < x < \infty)$

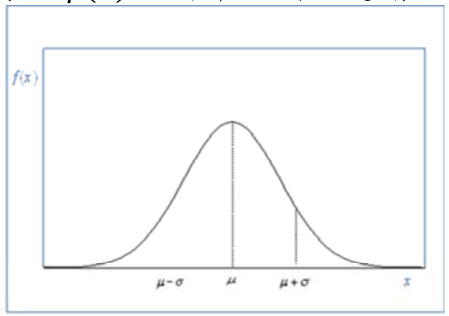
$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy$$

- 統計學教科書通常會附上『(標準)常態分配的累加機率函數表』，稍後再說明如何查表。
- $F(x)$ 為遞增函數；亦即，若 $x_1 \le x_2$ ，則 $F(x_1)\le F(x_2)$
- $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$ 、 $\lim_{x\to\infty} F(x)=1$ 、 $F(\mu)=0.5$

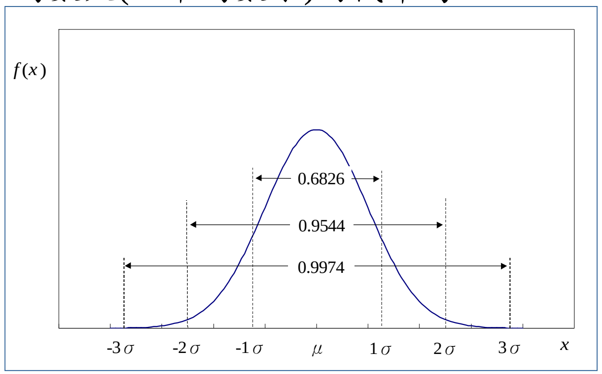


- **常態分配的形狀：**
  - 常態分配 $f(x)$ 為以 μ 為中心的對稱分配，亦即對任何的實數 a 而言， $f(\mu+a)=f(\mu-a)$ 。[參見底下左圖]
  - 常態分配 $f(x)$ 在 $X=\mu\pm\sigma$ 時有轉折點[曲線的曲率會改變]：當 $x\le\mu-\sigma$ 時，$f(x)$ 的斜率遞增；當 $x=\mu-\sigma$ 時，$f(x)$ 的斜率最大；當 $\mu-\sigma\le x\le\mu$ 時， $f(x)$ 的斜率逐漸遞減至 0；當 $x=\mu$ 時， $f(x)$ 的斜率為 0；當 $\mu\le x\le\mu+\sigma$ 時，$f(x)$ 的斜率逐漸遞；當 $x\ge\mu+\sigma$ 時， $f(x)$ 的斜率又開始遞增。





- 常態分配曲線下面的面積總和等於 1。[因 pdf 底下的面積代表機率，而所有的機率總和等於 1]
- 常態分配曲線的兩尾無限延伸。[因常態隨機變數 X 定義於 $-\infty < X < \infty$]
- 常態分配的平均數與中位數相同，都位於曲線的尖峰所在之位置；又由於常態分配是對稱的，所以常態隨機變數比平均數大(比平均數小)的機率為 0.5。



- 常態分配的機率範圍可分為三種情況：
  (1) 常態隨機變數的值落在離平均數1個標準差內(即 $\mu \pm \sigma$)的機率為：$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = 0.6826$
  (2) 常態隨機變數的值落在離平均數 2 個標準差內(即 $\mu \pm 2\sigma$)的機率為：$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = 0.9544$
  (3) 常態隨機變數的值落在離平均數 3 個標準差內(即 $\mu \pm 3\sigma$)的機率為：$P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) = 0.9974$
- 常態分配的平均數：若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，則其平均數

$$E(X) = \mu$$

證明：令 $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$，則 $x = \sigma z + \mu$，故 $dx = \sigma dz \Rightarrow \frac{dx}{\sigma} = dz$。因此

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \frac{dx}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + \mu) e^{-\frac{Z^2}{2}} dz = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{Z^2}{2}} dz + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{Z^2}{2}} dz$$

由於 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{Z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$，且

$$\int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{Z^2}{2}} dz = -e^{-\frac{Z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = -(0-0) = 0$$

因此 $E(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{Z^2}{2}} dz + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{Z^2}{2}} dz = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0 + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = \mu$

- 常態分配的變異數：若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，則其變異數

$$V(X) = \sigma^2$$

證明

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \frac{dx}{\sigma}$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{Z^2}{2}} dz = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-z) d(e^{\frac{-z^2}{2}}) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-z e^{\frac{-z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} dz \right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} [0 + \sqrt{2\pi}] = \sigma^2$$

- 例子：假設即溶咖啡包裝袋上標示其淨重為 12 公克，但未說明可能誤差。若咖啡重量的標準差為 0.5 公克，則隨機抽取一包咖啡，其重量介於 11 公克與 13 公克間的機率有多高？
  - 若未對咖啡重量的分配進行假設，根據柴比氏定理

    $P(11 \le X \le 13) = P(11-12 \le X-12 \le 13-12) = P(|X-12| \le 1)$

    $= P(|X-12| \le 2 \cdot 0.5) = P(|X-\mu| \le 2\sigma) \ge 1 - \frac{1}{2^2} = 0.75$
  - 若假設咖啡重量服從常態分配，則咖啡重量介於 11 公克與 13 公克間的機率有 0.9544。
- **常態分配的重要性**
  - 常態分配可做為在統計推論程序中的基本模式：很多資料的分配型態為常態(或近似常態)，因此常態分配可做為統計分析的基本模式。
  - 常態分配可進行許多統計推論：若假設資料來自於常態母體，則統計量的抽樣分配會有 t 分配、F 分配等精確分配。

  - 常態分配構成大樣本推論統計的基礎：若樣本個數趨近於無窮大，則母體參數估計式的抽樣分配趨近常態分配。
  - 間斷機率分配在某些條件下可利用常態分配求其近似值：二項分配的機率值可用常態分配加以近似。

常態分配的加法定理

- **定理 1**：設 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，若 $W = a + bX$ 則

  $W \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$
  - 若 X 為常態變數，則其線性函數 $W = a + bX$ 亦為常態，其平均數：$E(W) = E(a+bX) = a + bE(X) = a + b\mu$

    變異數：$V(W) = V(a+bX) = V(bX) = b^2 V(X) = b^2\sigma^2$
- **定理 2**：設 $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$，$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ 且 X、Y 獨立，若 $W = aX + bY$，則

  $W \sim N(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$

- **注意**：上述定理中，儘管 X、Y 並非獨立[隨機變數獨立的定義於第 9 章再說明]，其線性組合依然服從常態分配。

- 例子：假設即溶咖啡每包的成本(Y)為每包重量(X)的函數
  $Y=0.5+0.45X$
  - 假設 X 為平均數 12、標準差 0.5 的常態分配。
  - 根據定理 1，Y 也是常態分配，其平均數與變異數分別為
    $E(Y)=E(0.5+0.45X)=0.5+0.45E(X)=0.5+0.45\cdot 12=5.9$
    $V(Y)=V(0.5+0.45X)=0.45^2V(X)=0.45^2\cdot 0.5^2=0.05$

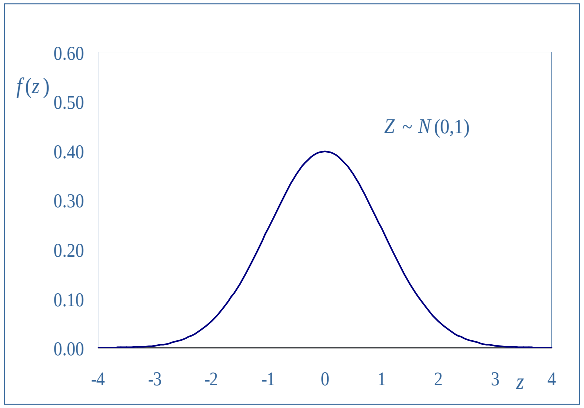
標準常態分配(standard Normal distribution)

- 有沒有發現之前在進行 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的 pdf 之有關運算時，都會令 $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$，將常態隨機變數進行**標準化**。
- 標準常態分配(隨機變數)是所有常態分配(隨機變數)的基礎，任何的常態分配(隨機變數)都是標準常態分配(隨機變數)的線性函數。

- **常態分配的標準化**：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，令 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$，則 Z 為一標準常態變數，因為
  - 我們可將 Z 表示成 $Z=-\frac{\mu}{\sigma}+\frac{1}{\sigma}X$，根據定理 1，可知 Z 具常態分配(令 $a=-\frac{\mu}{\sigma}$、$b=\frac{1}{\sigma}$)，其平均數與變異數分別為
    $E(Z)=E(-\frac{\mu}{\sigma}+\frac{1}{\sigma}X)=-\frac{\mu}{\sigma}+\frac{1}{\sigma}E(X)=-\frac{\mu}{\sigma}+\frac{1}{\sigma}\cdot\mu=0$
    $V(Z)=V(-\frac{\mu}{\sigma}+\frac{1}{\sigma}X)=\frac{1}{\sigma^2}V(X)=\frac{1}{\sigma^2}\sigma^2=1$
- 標準常態分配：若 Z 為一標準常態變數，則其機率密度函數為

$$f(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Z^2}{2}}\quad ,-\infty<z<\infty$$ [圖形見下頁]

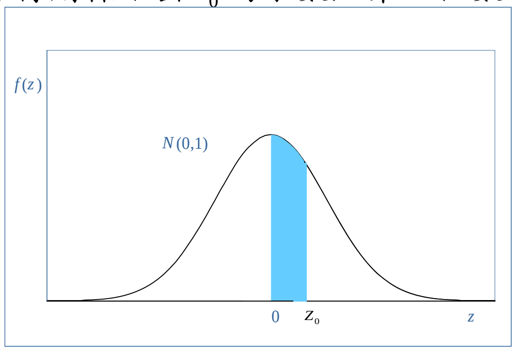
  - 由於 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的 pdf 為 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，將 $\mu=0$、$\sigma=1$ 代入即可得標準常態變數之 pdf。
  - 通常以 $Z\sim N(0,1)$ 來表示隨機變數 Z 服從常態分配。



- 我們可將 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 標準化成 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$；反過來，將標準常態隨機變數 $Z\sim N(0,1)$ 透過 $X=\mu+\sigma Z$ 的線性轉換，即可轉變成 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的常態隨機變數。換句話說，標準常態分配是一切常態分配的基礎，所有的常態變數都可以表達成標準常態變數的線性函數。

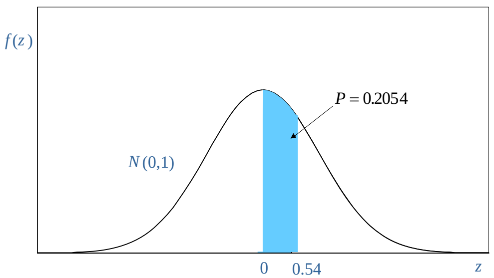
查表[p.781 表三]以計算標準常態變數位於某個區間的機率：

- 問題：若已知 $Z\sim N(0,1)$，則 $P(a\le Z\le b)=?$
  - 因為連續隨機變數發生某特定變量的機率為 0，因此
    $P(a\le Z\le b)=P(a<Z\le b)=P(a\le Z<b)=P(a<Z<b)$
- p.781 表三中的機率值是在計算 $P(0<Z<z_0)$。[下圖中陰影面積]
  - 表中最上面那行標示出 z_0 的小數點底下第二位數，最左邊那行則標示出 z_0 的小數點第一位數以上的數值



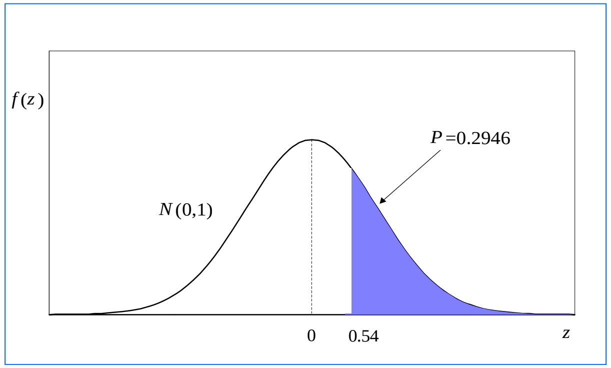
Z 的第二位小數										
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633

- 例子：$P(0<Z<0.54)=?$[如下圖陰影面積]
  - 先在表中最左邊那行找出 0.5，最上面找出 0.04，這兩個數字所對應到的數值 0.2054 就是 $P(0<Z<0.54)$。



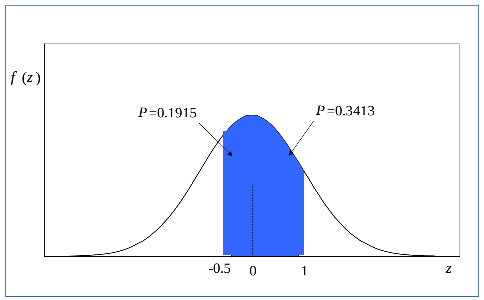
- 兩個有用的性質：由於標準常態分配對稱於 0，其中位數與平均數 0 相同，因此
  - $P(Z<0)=P(Z>0)=0.5$。
  - 若 z_0 為正數，則 $P(0<Z<z_0)=P(-z_0<Z<0)$。
    例如：$P(-0.54<Z<0)=P(0<Z<0.54)=0.2054$

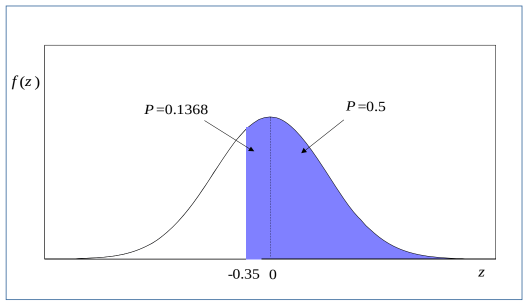
- 例子：$P(Z>0.54)=?$ [如下圖陰影面積]
  $$P(Z>0.54)=P(Z>0)-P(0<Z\le 0.54)$$
  $$=0.5-0.2054=0.2946$$



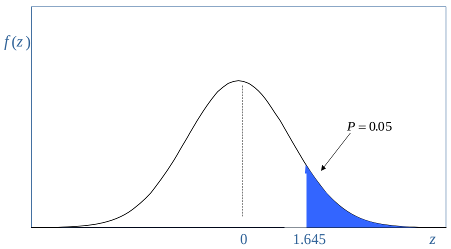
- 例子：計算 $P(Z<0.54)=?$
  $$P(Z<0.54)=P(Z\le 0)+P(0<Z<0.54)$$
  $$=0.5+0.2054=0.7054$$

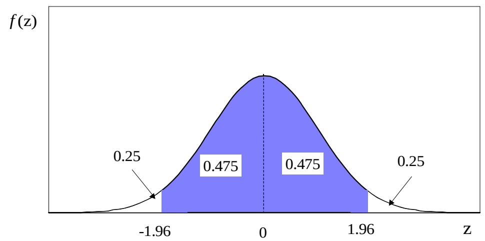
- 例子：計算 $P(-0.5<Z<1)=?$ [如底下左圖陰影面積]
  $$P(-0.5<Z<1)=P(-0.5<Z\le 0)+P(0<Z<1)$$
  $$=P(0\le Z<0.5)+P(0<Z<1)$$
  $$=0.1915+0.3414=0.5328$$
- 例子：計算 $P(Z>-0.35)=?$ [如底下右圖陰影面積]
  $$P(Z>-0.35)=P(-0.35<Z\le 0)+P(Z>0)$$
  $$=P(0\le Z<0.35)+P(Z>0)$$
  $$=0.1368+0.5=0.6368$$





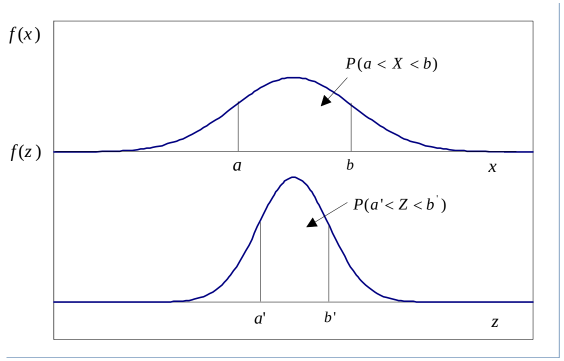
- 例子：找出 $P(Z > z_0) = 0.05$ 的 $z_0 = ?$ ［底下左圖］
  在 $P(Z > z_0) = 0.05$ 中找出 z_0，即等於在 $P(0 < Z < z_0) = 0.45$ 中找出 z_0。查表可知，最接近機率值 0.45 的 z_0 值為 1.64 或 1.65，經內插法可知 z_0 值為 $1.64 + \frac{0.5-0.4495}{0.4505-0.4495}(1.65-1.64) = 1.645$。
- 例子：找出 $P(-z_0 < Z < z_0) = 0.95$ 的 $z_0 = ?$ ［底下右圖］
  因為 $P(-z_0 < Z < 0) = P(0 < Z < z_0)$，故 $P(0 < Z < z_0) = \frac{0.95}{2} = 0.475$
  查表可知，當 z_0 值為 1.96 時，$P(0 < Z < z_0) = 0.475$。





利用標準常態分配求常態分配的機率：

- 當 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，並非標準常態變數時，要如何計算 $P(a < X < b)$



- 把常態變數 X 標準化成標準常態變數，再運用標準常態累積機率值表。

因為 $a < X < b \Rightarrow a - \mu < X - \mu < b - \mu \Rightarrow \dfrac{a-\mu}{\sigma} < \dfrac{X-\mu}{\sigma} < \dfrac{b-\mu}{\sigma}$

令 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ ［標準常態］、$a' = \dfrac{a-\mu}{\sigma}$、$b' = \dfrac{b-\mu}{\sigma}$；上式變為

$a' < Z < b'$

故 $P(a < X < b) = P(a' < Z < b')$

- ➢ 欲計算 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的常態變數位於 $a < X < b$ 的機率，等於計算標準常態變數位於 $a' < Z < b'$ 的機率。
- ➢ 碰到一般常態變數的機率問題時，只需進行上述的標準化變數變換，剩下的問題就容易解決了。

- 例子：假設青少年每個月的手機通話費為常態分配，其平均數為 325 元，標準差為 45 元，試求手機通話費介於 260~390 的機率？

$$P(260 < X < 390) = P(\tfrac{a-\mu}{\sigma} < \tfrac{X-\mu}{\sigma} < \tfrac{b-\mu}{\sigma}) = P(\tfrac{260-325}{45} < \tfrac{X-\mu}{\sigma} < \tfrac{390-325}{45})$$
$$= P(-1.44 < Z < 1.44) = 2 \times P(0 < Z < 1.44)$$
$$= 2 \times 0.4251 = 0.8502$$

- 假設失業者的希望待遇(X)為常態分配，其平均數 $\mu = 28{,}883$，標準差 $\sigma = 8{,}858$
  - ➢ 若現有職缺的月薪在 20,000 元以下，則這種職缺可滿足多少失業者

$$P(X < 20{,}000) = P(\tfrac{X-\mu}{\sigma} < \tfrac{b-\mu}{\sigma}) = P(\tfrac{X-\mu}{\sigma} < \tfrac{20{,}000-28{,}883}{8{,}858})$$
$$= P(Z < -1.00) = 0.1587$$

  - ➢ 若希望解決 75%的失業問題，新職缺的月薪至少應為何？
    查表可知 $P(Z < 0.67) = 0.75$，而

$$P(Z < 0.67) = P(\tfrac{X-\mu}{\sigma} < 0.67) = P(\tfrac{X-28{,}883}{8{,}858} < 0.67)$$
$$= P(X < 28{,}883 + 0.67 \times 8{,}858) = P(X < 34{,}858)$$

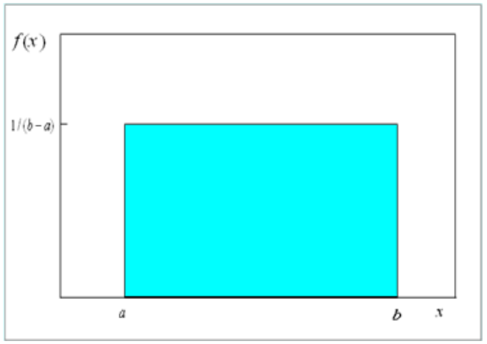
    故月薪最少應為 34,858 元。

- EXCEL 中計算標準常態累加機率值的函數為『NORMSDIST』，例如 NORMSDIST(1.33)是計算 $P(Z < 1.33)$。

均等分配(Uniform distribution)

- **均等分配**是指隨機變數在某一連續的區間有相同的機率密度;又稱**隨機分配**(randomness distribution),例如:
  - 等車的時間:若公車每 15 分鐘發一班車,你到了公車站牌,沒有看到公車,則你需要等車的時間就是均等分配。[因為不知道下一班公車現在走到哪裡,到公車站牌還需要多少時間,就把等車時間當成是 0~15 分鐘間的均等分配]
- 均等分配的機率密度函數:若 X 為連續隨機變數,其值域為 $a \le X \le b$,若其值域各數值的機率密度均相等,則稱 X 為均等分配隨機變數,其機率密度函數 $f(x)$ 為

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



- 均等分配滿足機率密度的兩個條件:
  - $f(x) \ge 0$
  - $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{x}{b-a}\Big|_a^b = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1$
- 均等分配的累加機率函數:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_a^x \tfrac{1}{b-a}dt = \tfrac{t}{b-a}\Big|_a^x = \tfrac{1}{b-a}(x-a) = \boxed{\dfrac{x-a}{b-a}}$$

- **均等分配的期望值**: $E(X) = \dfrac{b+a}{2}$

$$E(X) = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b x\tfrac{1}{b-a}dx = \tfrac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b$$
$$= \tfrac{1}{2(b-a)}(b^2-a^2) = \tfrac{1}{2(b-a)}(b-a)(b+a) = \boxed{\tfrac{b+a}{2}}$$

- **均等分配的變異數**: $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

$$V(X) = \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_a^b (x-\tfrac{b+a}{2})^2 \tfrac{1}{b-a}dx$$
$$= \tfrac{1}{b-a}\int_a^b [x^2-(b+a)x+(\tfrac{b+a}{2})^2]dx$$
$$= \tfrac{1}{b-a}[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{b+a}{2}x^2 + (\tfrac{b+a}{2})^2 x]\Big|_a^b$$
$$= \tfrac{1}{b-a}[\tfrac{1}{3}(b^3-a^3) - \tfrac{b+a}{2}(b^2-a^2) + (\tfrac{b+a}{2})^2(b-a)]$$
$$= \tfrac{1}{3}(b^2+ab+a^2) - \tfrac{b+a}{2}(b+a) + (\tfrac{b+a}{2})^2 = \boxed{\tfrac{(b-a)^2}{12}}$$

- 例子:假設電影院每 2 個小時放映一次,間隔入場的時間為 25 分鐘,若觀眾到達電影院時已錯過入場時間,必須等待。
  - 令 X 為等待入場的時間,則 X 為一個 0~95 [=120-25]分鐘的均等分配。
  - 等待時間的期望值與標準差分別為

    $E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+95}{2} = 47.5$

    $\sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \sqrt{\frac{(95-0)^2}{12}} = 27.4$
  - 等待超過 45 分鐘的機率為

    $P(X \ge 45) = 1 - P(X < 45) = 1 - \int_0^{45} \frac{1}{95-0}dt = 1 - \frac{45}{95} = 0.5263$
  - 等待時間介於半小時到 45 分鐘的機率為

    $P(30 \le X \le 45) = P(X \le 45) - P(X \le 30)$

    $= \int_0^{45} \frac{1}{95-0}dt - \int_0^{30} \frac{1}{95-0}dt = \int_{30}^{45} \frac{1}{95-0}dt = \frac{15}{95} = 0.1579$

指數分配(exponential distribution)

- 泊松分配用來衡量一段時間內某事件發生的次數的，而指數分配則是用來描述兩事件發生的間隔時間。
- 假設 Y 是具有參數 β 的泊松分配[β 是某段時間(時間長度為 t)內發生事件次數的期望值]，則 Y 具有底下機率函數

$$f(y)=\frac{\beta^y e^{-\beta}}{y!}\text{，}\quad y=0,1,2,\cdots,\infty$$

若以 X 來代表兩事件發生的時間間隔，則兩事件發生的時間間隔大於 $t\ (>0)$ 的機率 $P(X>t)$，等於是在時段 t 內沒有任何事件發生的機率 $P(Y=0)=f(y)=\frac{\beta^0 e^{-\beta}}{0!}=e^{-\beta}$；亦即

$$P(X>t)=e^{-\beta}$$

因此，隨機變數 X 的累加率函數為

$$F(t)=P(X\le t)=1-P(X>t)=1-e^{-\beta}$$

- 泊松分配的參數 β 是時段 t 內發生事件次數的期望值，若定義 $\lambda=\beta/t$，則可以把 λ 解釋成『單位時間內發生次數的平均值』，而 $\frac{1}{\lambda}=t/\beta$ 則可解釋為『事件發生的平均時間間隔』。
  - ➢ 根據 $\lambda=\beta/t$ 的定義，隨機變數 X 的累加機率函數可改寫為

$$F(t)=1-e^{-\beta}=1-e^{-(\beta/t)\cdot t}=1-e^{-\lambda t}$$

將 $F(t)$ 對 t 微分即可得隨機變數 X 的機率密度函數

$$f(t)=\frac{dF(t)}{dt}=\frac{d(1-e^{-\lambda t})}{dt}=\lambda e^{-\lambda t}$$

- **指數分配**：若 X 為連續的隨機變數，其機率密度函數為：

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\qquad x\ge 0,\lambda>0$$

則 $f(x)$ 為**指數分配**；式中，λ 為單位時間事件發生的平均數。

  - ➢ 指數分配的機率密度函數 $f(x)$ 滿足 $\int_0^\infty f(x)dx=1$

$$\int_0^\infty f(x)dx=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty=-(0-1)=1$$

➢ 指數分配在各種參數 λ 的機率密度函數形狀參見左下圖：

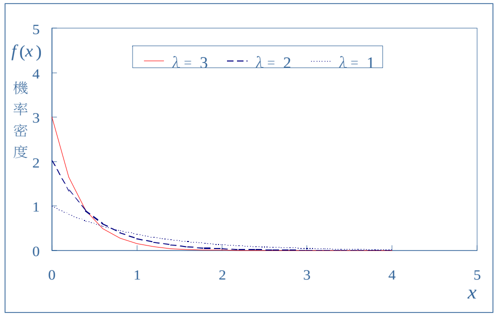
(1) 指數分配為一右偏分配。

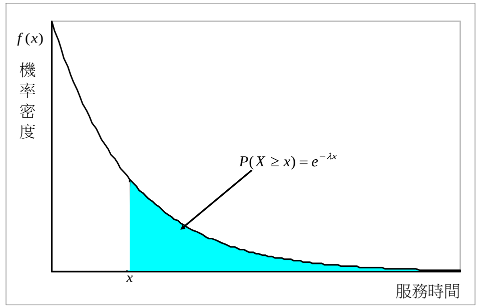
(2) 當 $X=0$ 時，$f(0)=\lambda$，此時機率密度最大；當 X 增加時，機率密度變小。

(3) λ 越大，分散程度($\frac{1}{\lambda^2}$)越小，平均數($\frac{1}{\lambda}$)越小。

- **指數分配的累加機率函數**：(右下圖)

$$F(x)=P(X\le x)=1-e^{-\lambda x}$$





- **指數分配的期望值**：$E(X)=\frac{1}{\lambda}$

$$E(X)=\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_0^\infty xd(-e^{-\lambda x})=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx$$

$$=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty=\frac{1}{\lambda}$$

- **指數分配的變異數**：$V(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx-(\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx)^2$$

$$=\int_0^\infty x^2 d(-e^{-\lambda x})-(\tfrac{1}{\lambda})^2=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty 2xe^{-\lambda x}dx-(\tfrac{1}{\lambda})^2$$

$$=\tfrac{2}{\lambda}\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx-(\tfrac{1}{\lambda})^2$$

$$=\tfrac{2}{\lambda}\cdot\tfrac{1}{\lambda}-(\tfrac{1}{\lambda})^2=\tfrac{1}{\lambda^2}$$

- 例子：計程車司機許先生一天平均每趟載客時間為 25 分鐘，每趟的時間間隔平均為 24 分鐘，則許先生在早上 9 點到 9 點半載到客人的機率為何？

- 令 X 表示每趟載客的時間間隔，由題意可知

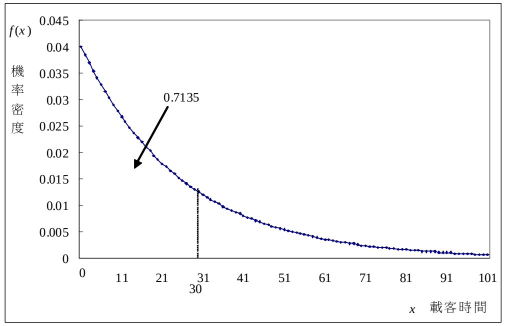
$$24 = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

因此 $\lambda = \frac{1}{24}$。每趟載客的時間間隔的機率密度函數為

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{24} e^{-\frac{1}{24}x}, \qquad x \geq 0$$

- 早上 9 點到 9 點半(小於 30 分鐘)載到客人的機率為

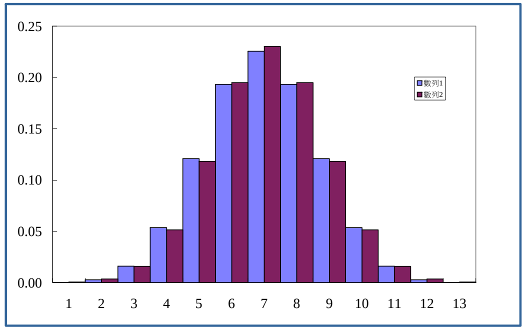
$$P(X \leq 30) = F(30) = 1 - e^{-\frac{1}{24}30} = 1 - e^{-1.25} = 1 - 0.2865 = 0.7135$$



二項分配與常態分配

- 若 n 很大，二項分配之機率的計算非常費事，因此通常以其他計算較簡單的分配來加以近似。
  - 若 n [試行次數]很大、p [成功機率]很小時，二項分配可用泊松分配加以近似[$n \geq 20$ 時，$np \leq 1$；$n \geq 50$ 時，$np \leq 5$；$n \geq 100$ 時，$np \leq 10$]。但若 n 很大、而 p 不是很小時，二項分配並不會近似泊松分配。
  - 若 n 很大、p 不是很小時[$p \leq 0.5$ 且 $np \geq 5$； $p > 0.5$ 且 $nq > 5$；$np > 5$ 且 $nq > 5$；也就是說，不管 p 是多少，只要 n 足夠大就可以]，二項分配會近似常態分配。
- **二項分配與常態分配的近似**：若 X 為二項隨機變數，其平均數為 $E(X) = np$，變異數為 $V(X) = npq$。當 $n \to \infty$ 時，二項隨機變數 X 會趨近常態分配，亦即[參見下頁圖]

$$X \sim N(np, npq)$$



- **連續性調整因子**(continuity correction factor)：由於二項分配為間斷分配，而常態分配為連續分配，如要以常態分配來替代二項分配以計算二項隨機變數的機率值時，必須進行**連續性調整**。
  - 計算二項隨機變數 X 的機率 $P(X = a)$ 時，如直接將 X 視為常態變數，根據常態分配計算 $P(X = a)$ 的機率，則機率值為 0 [錯誤結果]。欲修正此錯誤，計算時將機率值修正為 $P(a - \frac{1}{2} \leq X \leq a + \frac{1}{2})$ [計算一段長度為 1 的區間的機率值]

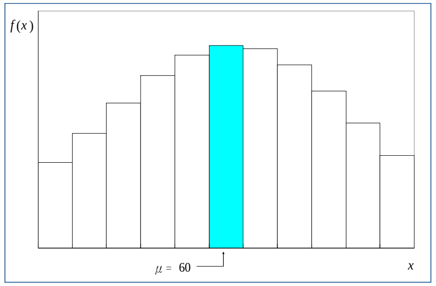
  - 將變量值加減 $\frac{1}{2}$ 的動作稱為**連續性調整**，$\frac{1}{2}$ 稱則為**連續性調整因子**。
  - 同理，若要計算二項隨機變數 X 位於某區間內的機率 $P(a \leq X \leq b)$，則根據常態分配計算 $P(a - \frac{1}{2} \leq X \leq b + \frac{1}{2})$。
- 例子：某溫泉旅館有房間 80 間，最近平日的出租率為 75%，請問平日一天租出 60 間房間的機率為何？
  - 將房間租出去視為成功，成功的機率 $p = 0.75$，租不出去視為失敗，失敗的機率 $q = 1 - p = 1 - 0.75 = 0.25$；因此，租出房間數($X$)服從二項分配，其

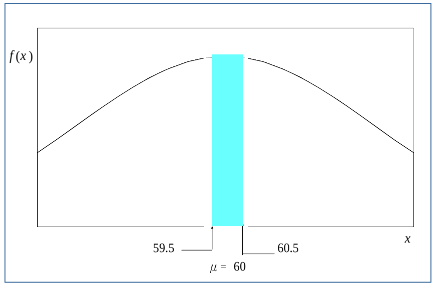
    平均數為 $E(X) = np = 80 \cdot 0.75 = 60$

    變異數為 $V(X) = npq = 80 \cdot 0.75 \cdot 0.25 = 15$
  - 由於 $n = 80$ [夠大了]、$p = 0.75$ [不是太小]，故可以用常態分配來近似二項分配。

- 計算一天租出 60 間房間的機率，等於是計算二項分配 $P(X=60)$ 之機率值，若欲以常態分配近似，則須計算

$$P(60-\tfrac{1}{2}\le X\le 60+\tfrac{1}{2})$$
$$=P\left(\frac{(60-\frac{1}{2})-60}{\sqrt{15}}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{(60+\frac{1}{2})-60}{\sqrt{15}}\right)$$
$$=P(-0.13\le Z\le 0.13)$$
$$=2\cdot P(0\le Z\le 0.13)$$
$$=2\cdot 0.0517=0.1034$$



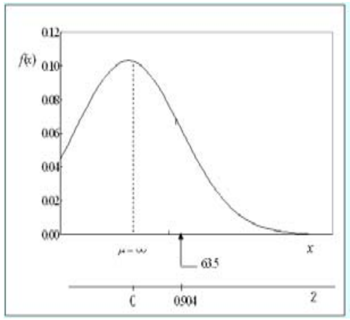


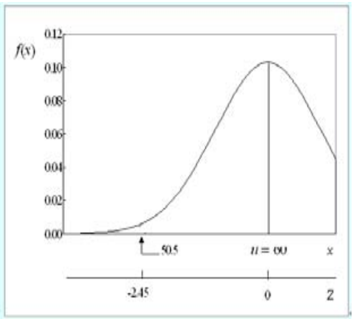
- 最少租出 64 間房間的機率，若以二項分配計算應為 $P(X\ge 64)$，若以常態分配近似則為

$$P(X\ge 64-\tfrac{1}{2})=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\ge\frac{(64-\frac{1}{2})-60}{\sqrt{15}}\right)=P(Z\ge 0.904)=0.1736$$

- 最多租出 50 間房間的機率，若以二項分配計算應為 $P(X\le 50)$，若以常態分配近似則為

$$P(X\le 50+\tfrac{1}{2})=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{(50+\frac{1}{2})-60}{\sqrt{15}}\right)=P(Z\le -2.45)=0.0071$$





超幾何分配、二項分配、泊松分配、常態分配間的關係